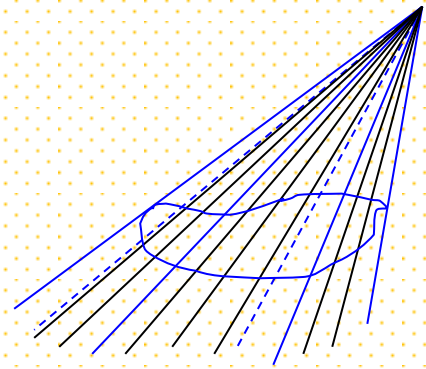


Kúpok

Adott a síkban egy zárt görbe és egy a síkra nem illeszkedő pont. Ha ezt a pontot összekötjük a zárt görbe összes pontjával, ekkor egy **kúp**ot kapunk.

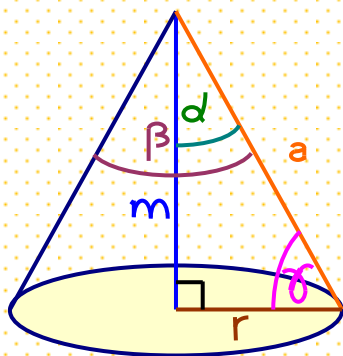
Az összekötő egyeneseket **alkotó** egyenesnek nevezzük.



Ha a zárt görbe kör, és az adott pontot a kör középpontjával

összekötő szakasz merőleges a kör síkjára, akkor a kúpot **egyenes körkúp**nak nevezzük.

Az egyenes körkúp



r : alapkör sugara

a : alkotó

α : a kúp fél nyílásszöge

β : a kúp nyílásszöge

γ : az alkotó és az alaplap hajlásszöge

m : magasság

Az egyenes körkúp térfogata: $V = \frac{T_a \cdot m}{3} = \frac{r^2 \pi m}{3}$

Az egyenes körkúp felszíne:

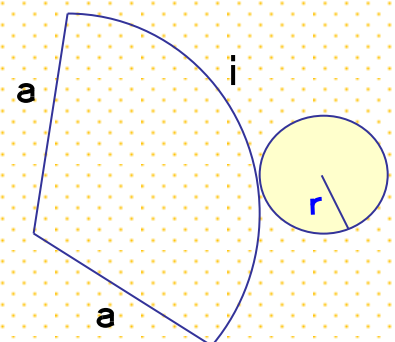
Ha egy alkotó és az alapkör mentén felvágjuk a kúpot, és síkba kiterítjük, akkor egy kört és egy körcikket kapunk. A körcikk a kúp palástja.

A körcikk ívhossza $i = 2r\pi$, mert a körvnek az alapkört kell körbeérnie.

$$P = \frac{\text{körív sugara} \cdot \text{ív hossz}}{2} = \frac{a \cdot 2r\pi}{2} = ar\pi$$

$$A = r^2\pi + P = r^2\pi + a \cdot r\pi = r\pi(r + a)$$

$$\boxed{A = r\pi(r + a)}$$



Feladatok.

1. Mekkora az egyenes körkúpnak a felszíne és térfogata, ha

$$a, r = 8, m = 7?$$

$$b, r = 7, a = 8?$$

2. Mekkora annak az egyenes körkúpnak a felszíne és térfogata, amely alapkörének sugara 20 cm, nyílásszöge pedig derékszög?

3. Egy egyenes körkúp alkotója 7,2 cm, nyílásszöge 90° . Mekkora a felszíne és a térfogata?

4. Egy egyenes körkúp kiterített palástja negyedkörlap. Számítsa ki a kúp magasságának és az alapkör sugarának az arányát!

5. Egy egyenes körkúp kiterített palástja 12 cm sugarú félkörlap. Mekkora a kúp felszíne és a térfogata?

6. Egy egyenes körkúp alapkörének sugara 5 cm. Mekkora a nyílásszöge, ha térfogata 186 cm^3 ?

7. Egy egyenes körkúp és körhenger alapköre közös, az alapkör sugara 22,5 cm. A henger és a kúp térfogata egyenlő. Mekkora a kúp felszíne, ha a henger magassága 50cm?

8. Egy egyenes körkúp térfogata $4,37 \text{ m}^3$, alkotói az alaplappal 67° -os szöget zárnak be. Mekkora a kúp felszíne?

9. Egy $74^\circ 74'$ középponti szögű körcikk területe $1052,9 \text{ cm}^2$. Számítsa ki annak a kúpnek a térfogatát, amelynek ez a körcikk a kiterített palástja!

10. Egy egyenes körkúp felszíne $1978,11 \text{ cm}^2$, tengelymetszetének területe 209 cm^2 . Mekkora a térfogata?

11. Ferde körkúp legnagyobb alkotója 46 cm, a legkisebb 29 cm. Alapkörének sugara 10 cm. Mekkora a térfogata?

12. Egy 8 cm alapsugarú és 15 cm magasságú egyenes körkúpot a csúcsán átmenő olyan síkkal metszünk el, amely az alappal 75° -os szöget zár be. Mekkora a metszéssel nyert két rész térfogata?
13. Egy 8 cm oldalú négyzetet átlója körül megforgatunk. Mekkora a keletkezett test térfogata és felszíne?
14. A csúcstól számítva milyen távolságban kell az egyenes körkúpot, az alappal párhuzamos síkkal elmetszeni, hogy térfogatát felezzük, ha a magasságának hossza m?

Megoldások.

1. Mekkora az egyenes körkúpnak a felszíne és térfogata, ha

a) $r = 8, m = 7$?

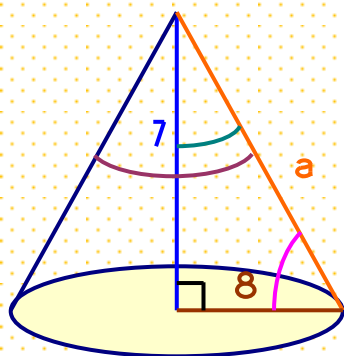
b) $r = 7, a = 8$?

a) $r = 8, m = 7$

A térfogatot azonnal számolhatjuk:

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3} = \frac{64 \cdot 3,14 \cdot 7}{3} = 468,91 \text{ cm}^3$$

A felszínhez kell az alkotó:



$$\begin{aligned} a^2 &= m^2 + r^2 \\ a^2 &= 49 + 64 \\ a &= 10,63 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$A = r\pi(r + a) = 8 \cdot 3,14(8 + a) = 8 \cdot 3,14(8 + 10,63) = 467,99 \text{ cm}^2$$

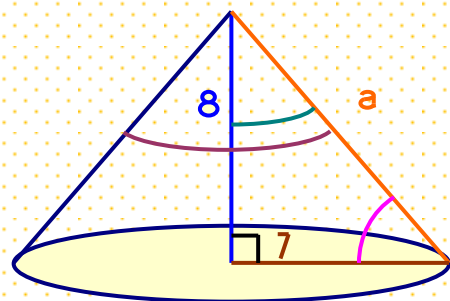
b)

$$\begin{aligned} a^2 &= m^2 + r^2 \\ a^2 &= 49 + 64 \\ a &= 10,63 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ha a sugarat és a magasságot felcseréljük, az alkotó akkor sem változik.

$$A = r\pi(r + a) = 7 \cdot 3,14(7 + 10,63) = 387,51 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3} = \frac{49 \cdot 3,14 \cdot 8}{3} = 410,29 \text{ cm}^3$$



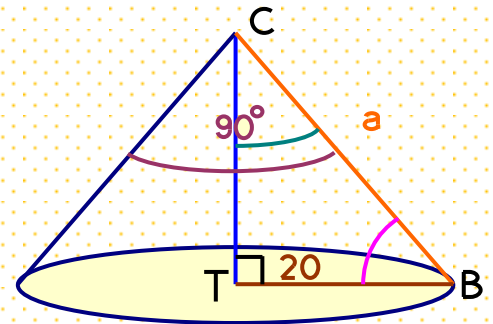
2. Mekkora annak az egyenes körkúpnak a felszíne és térfogata, amely alapkörének sugara 20 cm, nyílásszöge pedig derékszög?

A félnyílásszög 45° ezért a TBC_Δ háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög. $\Rightarrow m = r = 20$ cm

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3} = \frac{400 \cdot 3,14 \cdot 20}{3} = \underline{\underline{8373,3 \text{ cm}^3}}$$

$$a^2 = 20^2 + 20^2 = 800 \Rightarrow a = 28,28 \text{ cm}$$

$$A = r\pi(r + a) = 20 \cdot 3,14(20 + 28,28) = \underline{\underline{3031,98 \text{ cm}^2}}$$



3. Egy egyenes körkúp alkotója 7,2 cm, nyílásszöge 90° . Mekkora a felszíne és a térfogata?

A félnyílásszög 45° ezért a TBC_Δ háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög. $\Rightarrow m = r$

$$a = 7,2 \text{ cm}$$

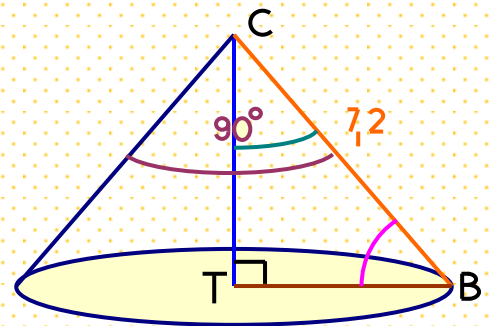
$$m^2 + m^2 = 7,2^2$$

$$m = 5,09 = r$$

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3} = \frac{5,09^2 \cdot 3,14 \cdot 5,09}{3} = 138,03 \text{ cm}^3$$

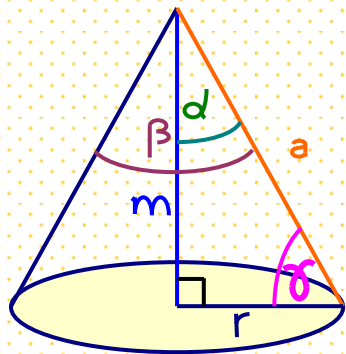
$$P = a \cdot r \cdot \pi = 7,2 \cdot 5,09 \cdot 3,14 = 115,07 \text{ cm}^2$$

$$A = r^2 \pi + P = 5,09^2 \cdot 3,14 + 115,07 = 196,42 \text{ cm}^2$$



4. Egy egyenes körkúp kiterített palástja negyed körlap. Számítsa ki a kúp magasságának és az alapkör sugarának az arányát!

A palást ívhossza egy a sugarú kör kerületének a negyede. Ez éri körbe az alapkör kerületét.



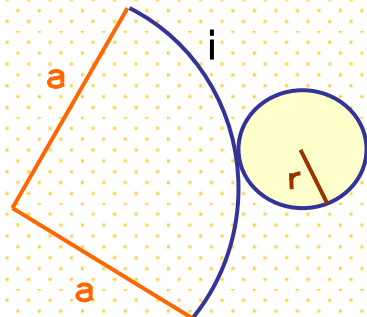
$$\frac{2a\pi}{4} = 2r\pi \Rightarrow r = \frac{a}{4} \Rightarrow a = 4r$$

$$m^2 + r^2 = a^2$$

$$m^2 + r^2 = 16r^2$$

$$m^2 = 15r^2$$

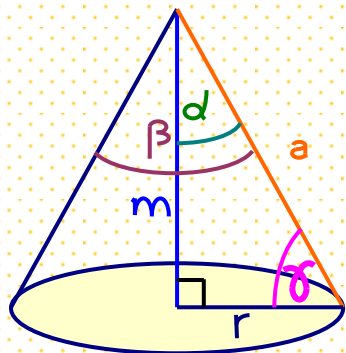
$$m^2 = 15r^2 \Rightarrow 15 = \frac{m^2}{r^2} \Rightarrow \frac{m}{r} = \sqrt{15}$$



5. Egy egyenes körkúp kiterített palástja 12 cm sugarú félkörlap. Mekkora a kúp felszíne és a térfogata?

$$a = 12 \text{ cm}$$

A palást ívhossza egy a sugarú kör kerületének a fele. Ez éri körbe az alapkör kerületét.



$$i = \frac{2a\pi}{2} = 2r\pi \Rightarrow r = \frac{a}{2} \Rightarrow r = 6$$

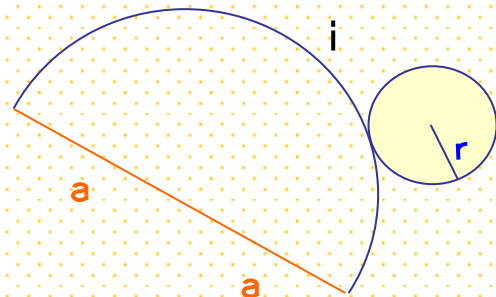
$$m^2 = a^2 - r^2$$

$$m = \sqrt{12^2 - 6^2}$$

$$m = \sqrt{108} = 10,39 \text{ cm}$$

$$V = \frac{r^2\pi m}{3} = 391,49 \text{ cm}^3$$

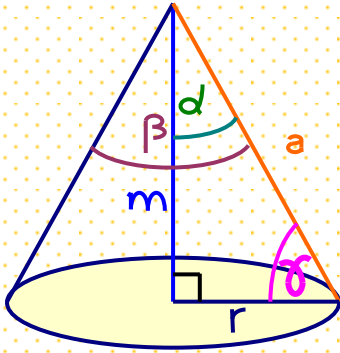
$$A = r\pi(r + a) = 339,12 \text{ cm}^2$$



6. Egy egyenes körkúp alapkörének sugara 5 cm. Mekkora a nyílásszöge, ha térfogata 186 cm³?

$$r = 5$$

$$V = 186 \text{ cm}^3$$



$$V = \frac{r^2 \pi m}{3} \Rightarrow m = \frac{3V}{r^2 \pi} = \frac{3 \cdot 186}{25 \cdot 3,14} = 7,108$$

$$\alpha \Rightarrow \text{tg} \alpha = \frac{5}{7,1}$$

$$\alpha = 35^\circ$$

$$\beta = 2\alpha = 70^\circ$$

7. Egy egyenes kúp és körhenger alapköre közös, az alapkör sugara 22,5 cm. A henger és a kúp térfogata egyenlő.

Mekkora a kúp felszíne, ha a henger magassága 50cm?

$$r = 22,5 \text{ cm}$$

$$m_h = 50 \text{ cm}$$

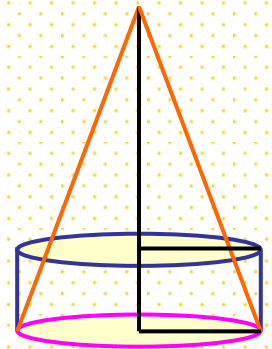
$$V_{\text{henger}} = V_{\text{kúp}}$$

$$V_h = r^2 \pi \cdot 50$$

$$V_k = \frac{r^2 \pi m}{3}$$

$$r^2 \pi \cdot 50 = \frac{r^2 \pi \cdot m}{3}$$

$$m_k = 150$$



Ezt persze kapásból megmondhattuk volna.

$$a^2 = r^2 + m^2$$

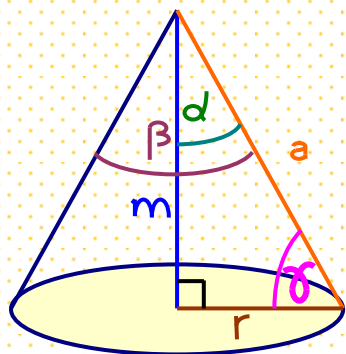
$$a^2 = 22,5^2 + 150^2$$

$$a = 151,68 \text{ cm}$$

$$A = r\pi(r + a)$$

$$A = 22,5\pi(22,5 + 151,68) = 12305,817 \text{ cm}^2$$

8. Egy egyenes körkúp térfogata $4,37 \text{ m}^3$, alkotói az alaplappal 67° -os szöget zárnak be. Mekkora a kúp felszíne?



$$V = 4,37 \text{ m}^3$$

$$\gamma = 67^\circ$$

$$\text{tg } 67^\circ = \frac{m}{r} \Rightarrow m = \text{tg } 67^\circ \cdot r$$

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3} \rightarrow 4,37 = \frac{r^2 \cdot 3,14 \cdot \text{tg } 67^\circ \cdot r}{3}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{4,37 \cdot 3}{3,14 \cdot \text{tg } 67^\circ}} =$$

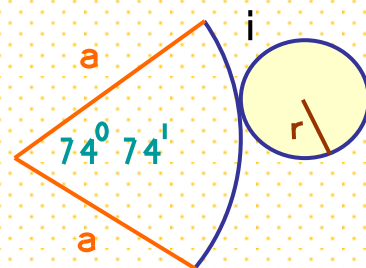
$$\cos \gamma = \frac{r}{a} \Rightarrow a = \frac{r}{\cos 67^\circ} =$$

$$A = r\pi(r + a) =$$

9. Egy $74^\circ 74'$ középponti szögű körcikk területe $1052,9 \text{ cm}^2$. Számítsa ki annak a kúpnak a térfogatát, amelynek ez a körcikk a kiterített palástja!

$$P = 1052,9 \text{ cm}^2$$

$$V_k = \frac{r^2 \pi m}{3}$$



Kell a kúp sugara és magassága.

$$\frac{i}{2a\pi} = \frac{74^\circ 74'}{360^\circ}$$

A palást ívének a hossza megegyezik az alapkör sugarával. $i = 2r\pi$

$$\frac{2r\pi}{2a\pi} = \frac{74^\circ 74'}{360^\circ} \Rightarrow a = 4,785 r$$

$$P = \frac{ai}{2} = \frac{a \cdot 2r\pi}{2} \Rightarrow 1052,9 = ar\pi$$

$$1052,9 = 4,785 r \cdot r\pi$$

$$r = 8,37 \Rightarrow a = 4,785 r = 40,06 \text{ cm}$$

$$m^2 = a^2 - r^2$$

$$m = \sqrt{40,06^2 - 8,37^2} = 39,17 \text{ cm}$$

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3} = \dots$$

10. Egy egyenes körkúp felszíne 1978,11 cm², tengelymetszetének területe 209 cm². Mekkora a térfogata?

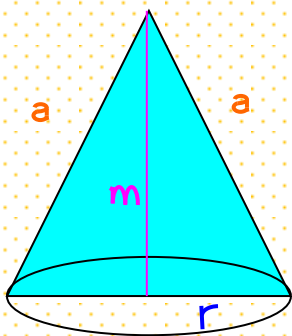
$$A = 1978,11 \text{ cm}^2$$

$$t_m = 209 \text{ cm}^2$$

$$A = r\pi(r + a)$$

$$1978,11 = r\pi(r + a) \quad / : 3,14$$

$$629,97 = r(r + a)$$



$$209 = \frac{2rm}{2}$$

$$209 = rm \Rightarrow m = \frac{209}{r}$$

$$m = \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$\frac{209}{r} = \sqrt{a^2 - r^2} \quad |(\)^2$$

$$\frac{209^2}{r^2} = a^2 - r^2 \quad | \cdot r^2$$

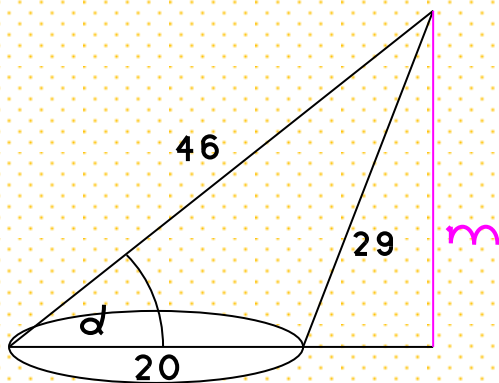
$$209^2 = a^2 r^2 - r^4$$

$$629,97 = r(r + a) = r^2 + ra \quad \Rightarrow \quad ra = 629,97 - r^2$$

$$209^2 = a^2 r^2 - r^4 \quad \Rightarrow \quad 209^2 = (629,97 - r^2)^2 - r^4$$

Ezt a negyedfokú egyenletet meg tudjuk oldani.

11. Ferde kőrkúp legnagyobb alkotója 46 cm, a legkisebb 29 cm. Alapkörének sugara 10 cm. Mekkora a térfogata?



$$\sin \alpha = \frac{m}{46}$$

Kéne az α . Van egy háromszög, aminek ismerjük az oldalait.

Használjuk a koszinusz-tételt!

$$29^2 = 46^2 + 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 46 \cos \alpha$$

↓

$$\cos \alpha =$$

↓

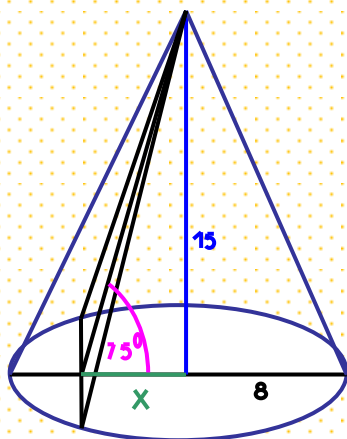
$$\alpha =$$

↓

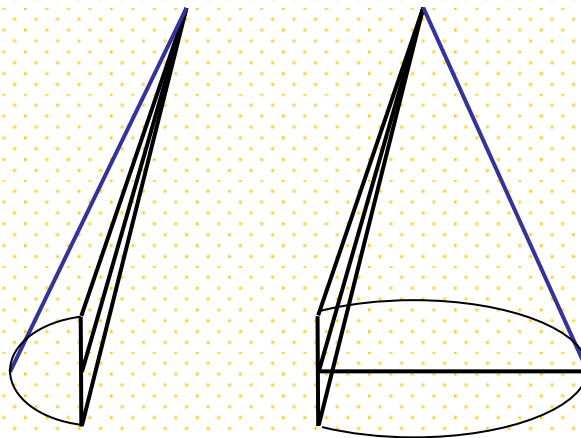
$$m = 46 \sin \alpha =$$

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3}$$

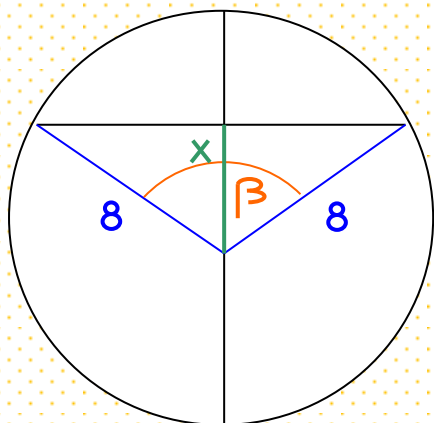
12. Egy 8 cm alapsugarú és 15 cm magasságú egyenes körkúpot a csúcsán átmenő olyan síkkal metszünk el, amely az alappal 75°-os szöveget zár be. Mekkora a metszéssel nyert két rész térfogata?



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 75^\circ &= \frac{15}{x} \\ x &= 4,02 \end{aligned}$$



Tulajdonképpen olyan gúláé térfogatát kell számolni, amelyeknek az alapja körszelet.



$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{4,02}{8} \Rightarrow \frac{\beta}{2} = 59,83^\circ \Rightarrow \beta = 119,66^\circ$$

$$\frac{\beta}{360^\circ} = \frac{t_{\text{körcikk}}}{r^2 \pi} \Rightarrow \frac{\beta}{360^\circ} = \frac{t_{\text{körcikk}}}{8^2 \pi}$$

$$t_{\text{cikk}} = 66,79$$

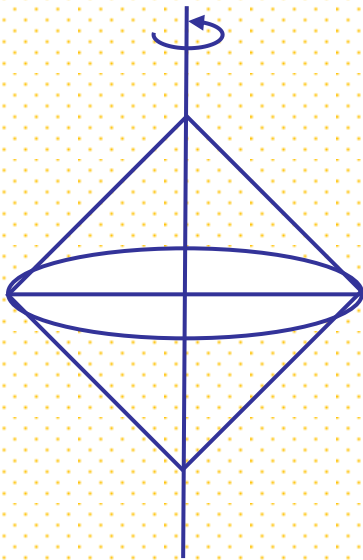
$$T_v = \frac{8 \cdot 8 \cdot \sin \beta}{2} = 27,81$$

$$t_{\text{szelet}} = t_c - t_v = 66,79 - 27,81 = 38,98$$

$$V_1 = \frac{t_{\text{sz}} \cdot m}{3} = 194,9 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = \frac{T_{\text{sz}} \cdot m}{3} = \frac{(t_{\text{kör}} - t_{\text{sz}}) m}{3} = 890,56 \text{ cm}^3$$

13. Egy 8 cm oldalú négyzetet átlója körül megforgatunk. Mekkora a keletkezett test térfogata és felszíne?



Egy kettős kúp keletkezik, ha a négyzetet az átlója körül megforgatjuk.

A kúp magassága és a sugara megegyezik a négyzetátló felével.

$$r = m = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

A térfogat a kúp térfogatának a kétszerese:

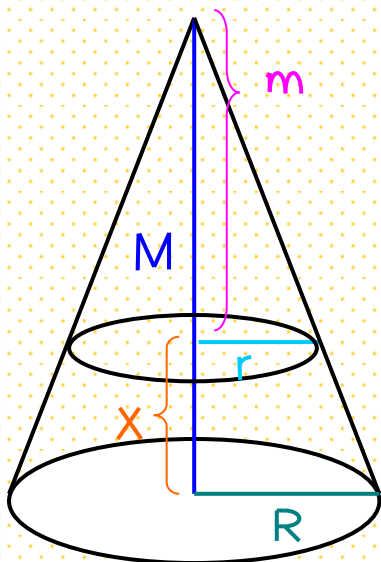
$$V = 2 \cdot \frac{r^2 \pi m}{3} = 2 \cdot \frac{\left(8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 3,14 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = 2 \cdot \frac{32 \cdot \pi \cdot 4\sqrt{2}}{3} = 378,88 \text{ cm}^3$$

A felszín a palást kétszereséből áll:

$$P = a \cdot r \cdot \pi = 8 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 3,14 = 35,52 \text{ cm}^2 \quad (= 32\sqrt{2} \cdot \pi)$$

$$A_{\diamond} = 2 \cdot P = 71,05 \text{ cm}^2$$

14. A csúcstól számítva milyen távolságban kell az egyenes körkúpot, az alapkörrel párhuzamos síkkal elmetezni, hogy térfogatát felezzük, ha a magasságának hossza m ?



$$2V_{\text{kicsi}} = V_{\text{nagy}}$$

$$V_k : V_n$$

$$\lambda^3 = 2$$

$$\lambda = \sqrt[3]{2}$$

$$R = \lambda \cdot r = r\sqrt[3]{2}$$

$$M = \lambda \cdot m = m\sqrt[3]{2} \rightarrow m = \frac{M}{\sqrt[3]{2}}$$

$$x = M - m = M - \frac{M}{\sqrt[3]{2}} = M \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2}}$$