Matematikai logika

Ítélet alatt olyan kijelentő mondatra gondolunk, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz, vagy hamis.
Azt a tulajdonságot, hogy az ítélet igaz (i), vagy hamis (h) az ítélet logikai értékének nevezzük.

Elemi ítéletnek nevezzük azokat az ítéleteket, amelyeket nem bonthatunk fel egyszerűbb ítéletekre.

Összetett ítélet, amelyik nem elemi. (Logikai műveletekkel kapcsolunk össze ítéleteket.)

Logikai műveletek

1. A tagadás

Az a ítéletből annak tagadásával előállított ítéletet a b ítélet negáltjának nevezzük. Jelölése: ┐a (nem a)

Ha zöld tábla van a teremben:

Pl.: **a = „A tábla zöld."** **┐a = „ A tábla *nem* zöld."**

a	┐a
i	h

Ha fekete tábla van a teremben:

Pl.: **a = „A tábla zöld."** **┐a = „ A tábla *nem* zöld."**

a	┐a
i	h

A negáció igazságtáblája:

p	┐p
i	h
h	i

Az ítélet negációja akkor igaz, ha az ítélet hamis.

A negáció néhány tulajdonsága:

1. ┐┐p = p minden *p* ítélet esetén páros sok tagadás az eredeti ítéletet eredményezi,
2. ┐h = i,
3. ┐i = h.

a = Minden nő szép. **┐a = Nem minden nő szép**

┐a = Van olyan nő aki nem szép

2. A konjunkció

Definíció: Az *a* valamint *b* ítéletekből az és kötőszóval képezett *a és b* összetett ítélet az a valamint b ítéletek konjunkciója. Jelölése: $a \wedge b$

A konjunkciót megadó igazságtábla (műveleti tábla) a következő:

a	b	$a \wedge b$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A konjunkció pontosan akkor igaz, ha az elő és utótagja is igaz.

A konjunkció tulajdonságai:

1. Idempotens /Minden a ítélet esetén teljesül, hogy: $a \wedge a = a$ /

2. Kommutatív /Minden a, b ítélet esetén teljesül, hogy: $a \wedge b = b \wedge a$ /

3. Asszociatív /Minden a, b, c ítélet esetén teljesül, hogy: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ /

3. A diszjunkció

Definíció: Az *a* valamint *b* ítéletekből a vagy kötőszóval képezett a vagy b összetett ítéletet az a és a b ítélet diszjunkciójának nevezzük. Jelölése: $a \vee b$

A diszjunkciót megadó igazságtábla:

p	q	$p \vee q$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

A diszjunkció pontosan akkor hamis, ha az elő- és utótagja is hamis.

A diszjunkció tulajdonságai:

1. Idempotens /Minden a ítélet esetén teljesül, hogy: $a \vee a = a$ /

2. Kommutatív /Minden a, b ítélet esetén teljesül, hogy: $a \vee b = b \vee a$ /

3. Asszociatív /Minden a, b, c ítélet esetén teljesül, hogy: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ /

4. Disztributív / $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ /

5. Minden p ítélet esetén teljesül, hogy: $a \vee i = i$,
6. Minden p ítélet esetén teljesül, hogy: $a \vee h = h$,
7. Minden p ítélet esetén teljesül, hogy: $a \vee \neg a = i$.

Elnyelési tulajdonságok

8. A de Morgan azonosságok:
1. $\neg (a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ 2. $\neg (a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

a = Ödönke szép. b = Ödönke erős.

$a \wedge b$ = Ödönke szép és erős. $\neg(a \wedge b)$ = Ödönke nem szép vagy Ödönke nem erős.

$a \vee b$ = Ödönke szép vagy Ödönke erős. $\neg(a \vee b)$ = Ödönke nem szép és Ödönke nem erős.

4. A kizáró vagy (antivalencia, XOR)

Kizáró vagy (xor): A művelet eredménye akkor igaz, ha az előtag és az utótag értéke nem egyforma.
Jele: $p \neq q$ (vagy p vagy q)

p	q	$p \neq q$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Vagy tanulsz vagy megbuksz.

5. Az implikáció (feltételes állítás)

Definíció: Az *a, b* ítéletekből a „ha a, akkor b” módon képezett összetett ítélet. Jelölése: $p \Rightarrow q$

Az implikációt megadó műveleti tábla a következő:

p	q	$p \Rightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Az implikáció pontosan akkor hamis, ha az előtag igaz de az utótagja hamis.

Pl.: a =”Süt a Nap.” b =”Strandra megyünk.”

$a \Rightarrow b$ = ”*Ha* süt a Nap, *akkor* strandra megyünk.”

Az implikáció néhány tulajdonsága:

pl. $a \Rightarrow b$ = ”*Ha* süt a nap, *akkor* strandra megyünk.”

Megfordítása: $b \Rightarrow a$ = ”*Ha* strandra megyünk, *akkor* süt a nap.”

Az állítás nem egyezik meg a megfordításával. Nem kommutatív művelet.

Az implikáció nem kommutatív és nem asszociatív.

A matematikában a tétel egy implikáció. Az előtagot feltételnek, az utótagot állításnak nevezzük.
A tétel megfordítását kapjuk, ha felcseréljük a feltételt és az állítást.
Van olyan állítás, aminek igaz a megfordítása, és van olyan, amelyiknek nem!

Az implikáció tagadása: $\neg(p \Rightarrow q) = p \wedge \neg q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
i	i	i	h	h	h
i	h	h	i	i	i
h	i	i	h	h	h
h	h	i	h	i	h

pl.: $p \Rightarrow q$ = ”*Ha* süt a Nap, *akkor* strandra megyünk.”

A tagadása: $\neg(p \Rightarrow q) = p \wedge \neg q$ = Strandra megyünk, és nem süt a Nap

A p ⇒ q implikációt kifejezhetjük a következő módon is:

a. $p \Rightarrow q = \neg(p \wedge \neg q)$.   illetve: **b.** $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$.

6. Ekvialencia (akkor és csak akkor)

Definíció: Az *a* és *b* ítéletek **ekvivalenciájának** nevezzük azt az ítéletet, amelynek logikai értéke igaz, ha az *a* és *b* ítéletek logikai értéke azonos.

Jelölése: $a \Leftrightarrow b$.   **Más módon:** $a \Leftrightarrow b := (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

p	q	$a \Leftrightarrow b$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Az ekvivalencia néhány tulajdonsága:

Kommutatív: $p \Leftrightarrow q = q \Leftrightarrow p$

Asszociatív: $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r = p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$