

Kombinatorika

Az első n pozitív szám szorzatát n faktoriálisnak nevezzük és $n!$ jellel jelöljük:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

I. típus: Hányféleképpen lehet sorba rendezni n különböző elemet úgy, hogy a sorrend számít? (Ismétlés nélküli permutáció)

n különböző elemet n faktoriális-féleképpen lehet sorba rendezni. $P_n = n!$

II. típus: Hányféleképpen lehet sorba rendezni n elemet, ha vannak köztük egyformák? (Ismétléses permutáció) (Ismétléses permutáció)

$$P_{n;i}^{(k_1, k_2, k_3, \dots, k_s)} = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_s!}$$

III. típus. n különböző elemet hányféleképpen lehet egy kör alakú asztalnál sorba rendezni? (Ciklikus permutáció)

Két elrendezést, akkor tekintünk különbözőnek, ha minden elem mindkét szomszédja különböző, illetve ha elforgatással nem alakíthatók egymásba.

n különböző elemet $(n-1)!$ -féleképpen lehet egy kör alakú asztalnál sorba rendezni.

IV típus. Hányféleképpen lehet kiválasztani n különböző elemből k különböző elemet ($k < n$) úgy, hogy a sorrend számít és minden elemet csak egyszer választhatunk. (Ezt ismétlés nélküli variációnak nevezzük.)

n különböző elemből $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ -féleképpen lehet kiválasztani k különböző elemet úgy, hogy a sorrend számít és minden elemet csak egyszer választhatunk.

V. Típus: Hányféleképpen lehet kiválasztani n különböző elemből k elemet úgy, hogy mindegyik elemet akárhányszor választhatjuk, de a sorrend számít? (Ismétléses variáció)

$$V_{n;i}^k = n^k \quad k < n$$

VI. típus. Hányféleképpen lehet n különböző elemből kiválasztani k elemet úgy, hogy a sorrend nem számít, és minden elemet csak egyszer választhatunk? (Ezt n elem ismétlés nélküli kombinációjának nevezzük.)

n különböző elemből $C_n^k = \binom{n}{k}$ - féleképpen lehet kiválasztani k elemet úgy, hogy a sorrend nem számít, és minden elemet csak egyszer választhatunk.

VII. típus. Hányféleképpen lehet n különböző elemből kiválasztani k elemet úgy, hogy a sorrend nem számít, és minden elemet többször is választhatunk? ($k > n$ lehetséges!)
Ismétléses kombináció.

n különböző elemből $C_n^{k;i} = \binom{n+k-1}{k}$ - féleképpen lehet kiválasztani k elemet úgy, hogy a sorrend nem számít, és minden elemet többször is választhatunk.

	Minden dolog különböző	Lehetnek köztük egyformák
Az összes dolgot sorba rakjuk	<p>Ismétlés nélküli permutáció</p> <p>Hányféleképpen lehet sorba rakni n különböző dolgot? $P=1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n=n!$</p> <p><i>például:</i> hányféle sorrendben ülhet le egymás mellé 5 ember? $5!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5=120$</p>	<p>Ismétléses permutáció</p> <p>Hányféleképpen lehet sorba rakni n dolgot, ha köztük n_1, n_2, \dots, n_k darab egyforma van? $(n_1+n_2+\dots+n_k=n)$</p> $P = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$ <p><i>például:</i> hányféleképpen lehet sorba rakni 2 kék és 3 piros golyót? $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$</p>
Kiválasztunk néhányat a dolgok közül és sorba rakjuk őket	<p>Ismétlés nélküli variáció</p> <p>Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha számít a kiválasztás sorrendje és mindegyiket csak egyszer választhatjuk?</p> $V = \frac{n!}{(n-k)!}$ <p><i>például:</i> egy 10 csapatos bajnokságban hányféle sorrend alakulhat ki a dobogón? $\frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$</p>	<p>Ismétléses variáció</p> <p>Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha számít a kiválasztás sorrendje és egy dolgot többször is választhatunk? $V=n^k$</p> <p><i>például:</i> totó (a 3 lehetséges végeredményből (1, 2, x) képezünk 14 (13+1) hosszúságú sorozatokat) $3^{14}=4782969$</p>
Kiválasztunk néhányat a dolgok közül úgy, hogy a sorrend nem számít	<p>Ismétlés nélküli kombináció</p> <p>Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha nem számít a kiválasztás sorrendje és mindegyiket csak egyszer választhatjuk?</p> $C = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ <p><i>például:</i> lottó (90 számból választunk ötöt, nem számít a kiválasztás sorrendje) $\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} = 43949268$</p>	<p>Ismétléses kombináció (NEM érettségi anyag!)</p> <p>Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha nem számít a kiválasztás sorrendje és egy dolgot többször is választhatunk?</p> <p><i>például:</i> a lottóhúzásnál minden alkalommal visszateszem a kihúzott golyót, így egy szám többször is szerepelhet</p>

Egyszerűbb feladatoknál a következő sémát használhatod:

