A hatványozás inverz műveletei.

(Hatvány, gyök, logaritmus)

Ismétlés: Hatványozás egész kitevő esetén

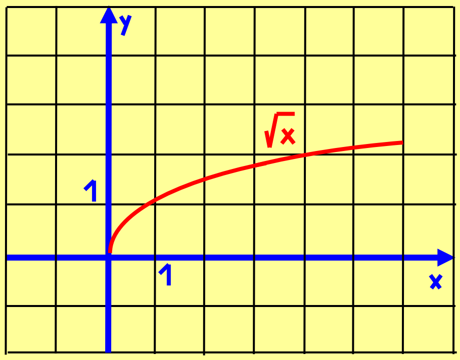
Def.: $a^n := a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ Olyan *n* tényezős szorzat, melynek minden tényezője *a*.

a^n *a*: hatványalap *n*: kitevő a^n : hatványérték

A hatványozás azonosságai egész kitevő esetén:

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $b \neq 0$	$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$	$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$ $a \neq 0$
$\left(a^n\right)^k = a^{nk}$	$a^0 = 1$ $a \neq 0$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a \neq 0$	$a;b \in R$ $n;k \in N^+$

Ismétlés: A négyzetgyökvonás



$f(x) = \sqrt{x}$

$D_f = \{x \in R \text{ I } x \geq 0\}$ $ÉT: x \geq 0$

$R_f = \{y \in R \text{ I } y \geq 0\}$ $ÉK: y \geq 0$

$ZH: x = 0$ $ZH: x = 0$

$SZÉ: \min(0;0)$ $SZÉ: \min(0;0)$

SZMN SZMN

Def.: Négyzetgyök *„a”* jelenti azt a nem negatív számot, melynek négyzete *„a”*. $\left(\sqrt{a}\right)^2 := a$ $a \geq 0$

A négyzetgyökvonás azonosságai:

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $a \geq 0; b \geq 0$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $b \neq 0$	$\left(\sqrt{a}\right)^k = \sqrt{a^k}$

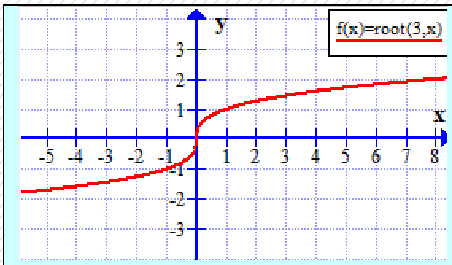
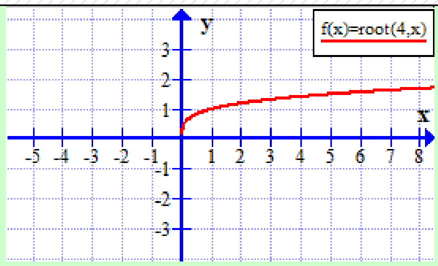
A hatványozás első inverz művelete, az n-edik gyökvonás.

Az n-edik gyök függvény. Az n-edik gyök definíciója.

Ha a kitevő páros, akkor a hatványfüggvény ($f(x) = x^n$) nem kölcsönösen egyértelmű.

Páros kitevő esetén le kell szűkíteni az értelmezési tartományt.

$n \in N^+$ $\quad n \geq 2$

	**páratlan gyök** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **ÉT: x ϵ R** **ÉK: y ϵ R** **ZH: x = 0** **SZÉ: -** **SZMN** **páratlan fv.**		**páros gyök** $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ **ÉT: x ≥ 0** **ÉK: y ≥ 0** **ZH: x = 0** **SZÉ: min.(0; 0)** **SZMN: x > 0**

Def.: Ha n páratlan akkor n-edik gyök *a* ($\sqrt[n]{a}$) jelenti azt a számot, amelynek n-edik hatványa *a*. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n := a$ *a ϵ* R	$2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$ $(-2)^3 = -8 \Rightarrow \sqrt[3]{-8} = -2$ $2^5 = 32 \Rightarrow \sqrt[5]{32} = 2$ $(-3)^3 = -27 \Rightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$
Def.: Ha n páros, akkor $\sqrt[n]{a}$ jelenti azt a nem negatív számot, amelynek n-edik hatványa a. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n := a$ a ≥ 0; a ϵ R	$2^4 = 16 \Rightarrow \sqrt[4]{16} = 2$ $(-2)^4 = 16 \Rightarrow \sqrt[4]{-16}$ nincs értelmezve! $2^6 = 64 \Rightarrow \sqrt[6]{64} = 2$ $(-3)^4 = 81 \Rightarrow \sqrt[4]{-81}$ nincs értelmezve!

Az n-edik gyökvonás azonosságai:

1. Szorzatból tényezőnként vonhatunk gyököt.	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	ÉT.: $n \in N^+$ $\quad n > 1$ Ha n páros $\Rightarrow$ a, $b \in R^+$ Ha n páratlan $\Rightarrow$ a, $b \in R$
2. Hányadosból is tényezőnként vonhatunk gyököt.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\quad b \neq 0$	
3. A hatványozás és az n-edik gyökvonás sorrendje felcserélhető.	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$	
4. Az n-edik gyök alatti k-adik gyökvonás helyettesíthető n·k-adik gyökvonással.	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	
5. A gyökkitevőt úgy bővítjük, hogy amivel szorozzuk a gyökkitevőt, ugyanazzal szorozzuk a gyök alatti kifejezés hatványkitevőjét is.	$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n \cdot p]{a^{k \cdot p}}$	

A hatványfogalom általánosítása racionális kitevőre:

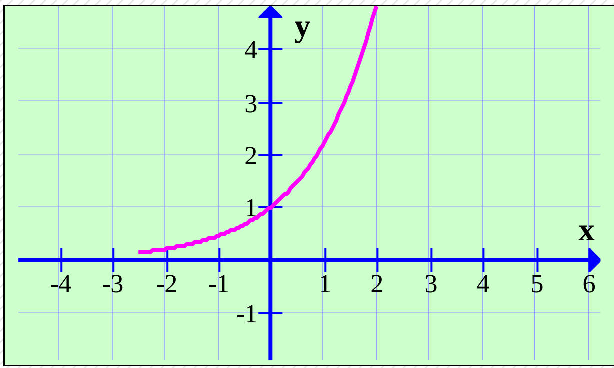
Def.: $a^{\frac{p}{q}}$ -adikon jelentse azt a pozitív számot, amelynek q-adik hatványa a^p -ediken. a >0, p,q ϵ Z

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q := a^p \qquad a > 0 \quad p;q \in Z \quad a^p > 0$$

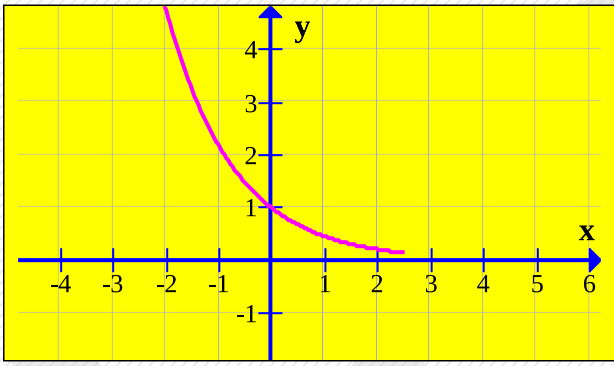
Kapcsolat a racionális kitevő és az n. gyökvonás között:

$$\left.\begin{aligned}\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n &:= a \quad \text{ha} \quad a>0\\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n &:= a\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \text{ha} \quad a>0$$

Az exponenciális függvények és tulajdonságaik:



$x \mapsto a^x \quad a>1$	$x \mapsto a^x \quad a>1$
ÉT: $x \in R$	$D_f = R$
ÉK: $y \in R$; $y>0$	$R_f = R^+$
ZH: –	ZH: –
SZÉ: –	SZÉ.: –
SZMN	SZMN



$x \mapsto a^x \quad 0<a<1$	$x \mapsto a^x \quad 0<a<1$
ÉT: $x \in R$	$D_f = R$
ÉK: $y \in R$; $y>0$	$R_f = R^+$
ZH: –	ZH: –
SZÉ: –	SzÉ.: –
SZMCS	SZMCS

Exponenciális egyenletek:

Azonos alapú hatványokra visszavezethető exponenciális egyenletek

Arról lehet felismerni őket, hogy azonos alapú hatványok között csak szorzás és osztás van.

$$8^{5x-3}\cdot 8^{-2x+1} = 8^{3x+2}\cdot 8^{-4x+4} \qquad \frac{1}{8}\sqrt[4]{4^{3x-1}} = 8^{-\frac{2}{3}}$$

Nulla kitevős exponenciális egyenletek.

Arról ismerheted fel őket, hogy egy hatvány értéke 0.

$$4^{2-5x} - 1 = 0 \qquad 5^{3x-1} = 1$$

Kiemeléses exponenciális egyenletek.

Arról ismerheted fel őket, hogy egy szám hatványainak összege vagy különbsége szerepel benne.

$$2^x + 2^{x-3} = 18 \qquad 4\cdot 3^{x+1} - 72 = 3^{x+2} + 3^{x+1} \qquad 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = \frac{40}{3}$$

Másodfokú egyenletekre visszavezethető exponenciális egyenletek.

Ha egy hatvány és annak a négyzete is szerepel az egyenletben, akkor az egyenlet valószínűleg másodfokúra visszavezethető típus.

$9^x - 6 \cdot 3^x = 27$ $\qquad$ $2^x - 0{,}5^x = 3{,}75$ $\qquad$ $3^{4-x} + 3^{x-1} = 12$

Egyéb exponenciális egyenletek.

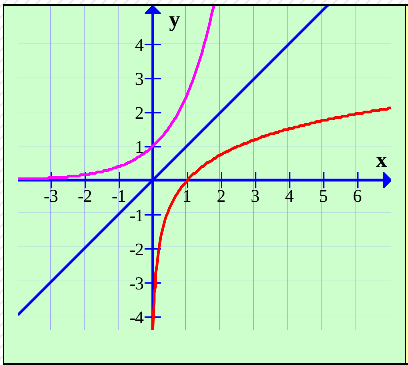
Exponenciális egyenletrendszerek.

Exponenciális egyenlőtlenségek.

Vegyes feladatok.

A hatványozás második inverz művelete, a logaritmus.

A logaritmus függvény:



$a > 1$

$f(x) = \log_a x$

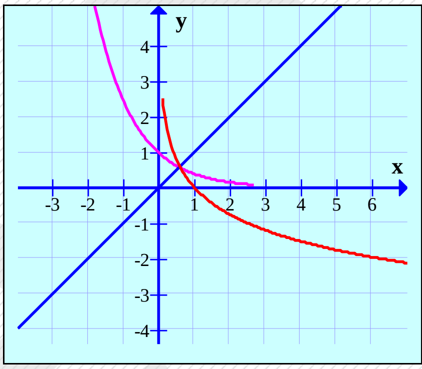
$ÉT: R^+$

$ÉK: R$

$ZH: x = 1$

$Sz.é.: -$

SZMN



$0 < a < 1$

$f(x) = \log_a x$

$ÉT: R^+$

$ÉK: R$

$ZH: x = 1$

$Sz.é.: -$

SZMCS

A logaritmus fogalma:

Def.: *a* alapú logaritmus *b* jelentse azt a kitevőt, amelyre *a*-t emelve *b*-t kapok.

$\boxed{a^{\log_a b} := b}$ $\qquad$ $a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0$ $\qquad$ **Alapazonosságnak is hívjuk.**

$\boxed{a^c = b \Leftrightarrow c = \log_a b}$ **Exponenciális átírás**

A logaritmus azonosságai:

1. Szorzat logaritmusát megkapjuk, ha a tényezők logaritmusát összeadjuk.	$\boxed{\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y}$ $\quad x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
2. Egy tört logaritmusát megkapjuk, ha a számláló logaritmusából kivonjuk a nevező logaritmusát.	$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$ $\quad x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
3. Hatvány logaritmusát megkapjuk, ha a hatványalap logaritmusát megszorozzuk a kitevővel.	$\boxed{\log_a x^k = k \cdot \log_a x}$ $\quad x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

Átírás új logaritmus alapra:

Egy kifejezés logaritmusát úgy írjuk át új alapú logaritmusra, hogy vesszük a kifejezésnek az új alapú logaritmusát, és azt elosztjuk a régi logaritmusalap új alapú logaritmusával.	$\boxed{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$

Logaritmikus egyenletek

$\lg x = 3 - \lg 5$ $\lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg 8 + \lg(x-2)$ $\lg\left(x^2 - 5x - 9\right) - \lg(2x-1) = 0$

Logaritmikus egyenlőtlenségek

$\log_3 x > 9$ $\log_3 x < -1$ $\log_{\frac{1}{2}} x > -2$ $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$

Logaritmikus egyenletrendszerek