Halmazok

Halmazon bizonyos dolgok összességét értjük, ha bármiről egyértelműen el lehet dönteni, hogy beletartozik, vagy nem.

A halmaz elemei azok a dolgok, amelyek beletartoznak.

A halmazokat nagy betűkkel jelöljük.

A halmaz megadása:

– felsorolással A felsorolásban minden elem csak egyszer szerepelhet.
– utasítással pozitív páros számok halmaza.
– Egy jellemző tul. megadásával: $\{ c \in N^{+} \mid 2|c \}$

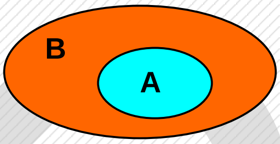
Azt a halmazt, amelyikből válogathatjuk a megfelelő elemeket, illetve amely elemei a szóban forgó vizsgálatokban lehetségesek lehetnek, alaphalmaznak nevezzük. Az alaphalmazt mindig adottnak kell tekintenünk. Az alaphalmaz jelölésére általában a H és U betűket használjuk.

Üres halmaz az a halmaz, amelynek egyetlen egy elem sincs. Jele: $\emptyset$

A halmaz elemeinek a számát úgy jelöljük, hogy a halmaz betűjelét abszolút érték jelbe tesszük. IAI az A halmaz elemeinek a számát jelenti.

Két halmaz egyenlő, ha ugyanazok az elemeik. A = B

A *A* halmaz részhalmaza a *B* halmaznak, ha az *A* halmaz összes eleme a *B* halmaznak is eleme. Jele: $A \subset B$



$A \subset B$
Venn-diagramm

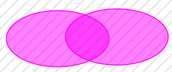
Bármely halmaz részhalmaza önmagának.
Megállapodás, hogy az üres halmazt minden halmaz részhalmazának tekintjük. Az üres halmazt és önmagát nem tekintjük valódi részhalmaznak.

Halmazműveletek:

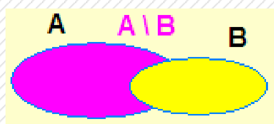
Két halmaz metszetén azon elemek halmazát értjük, amelyek mindkettőnek elemei.

Ha a két halmaznak nincs közös eleme, akkor azt mondjuk, hogy idegenek.

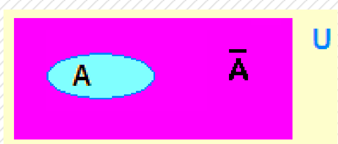
Két halmaz egyesítésén azon elemek halmazát értjük, amelyek valamelyiknek elemei.



A mínusz B halmazon A azon elemeit értjük, amelyek B-nek nem elemei.



Az A halmaz komplementere az a halmaz, ami az A halmazt az alaphalmazzá egészíti ki.



A halmazműveletek műveleti tulajdonságai

A halmazok metszete és uniója kommutatív művelet.
A halmazok metszete és uniója asszociatív művelet.
Disztributivítás

a.) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b.) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

A de Morgan-szabályok: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

A logikai szita formula: $|A \cup N| = |A| + |N| - |A \cap N|$

Számhalmazok

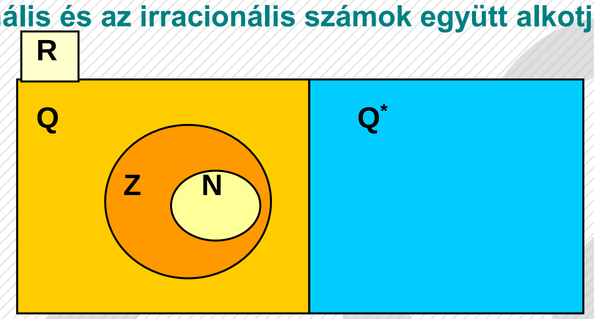
Természetes számokon a nullát és a pozitív egész számokat értjük.

Az egész számok halmazának a jele: $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots\}$

A racionális számok azok, amelyek felírhatóak két egész szám hányadosaként.
Az racionális számok halmazának a jele: Q
A racionális számok tizedes tört alakja véges vagy végtelen de szakaszos.

Az irracionális számok azok, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként.
Az irracionális számok halmazának a jele: Q^*
Az irracionális számok tizedes tört alakja végtelen, nem szakaszos.

A racionális és az irracionális számok együtt alkotják a valós számok halmazát!



A valós számok műveleti tulajdonságai

1. A valós számok összeadása és szorzása kommutatív: $a + b = b + a$ $\qquad$ $a \cdot b = b \cdot a$
2. A valós számok összeadása és szorzása asszociatív.
3. A valós számok szorzása disztributív az összeadásra nézve. (Összeget úgy szorzunk, hogy minden tagot szorzunk.) $\qquad$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
4. Több tagot több taggal úgy szorzunk, hogy minden tagot minden taggal szorzunk.

Műveletek algebrai kifejezésekkel

Algebrai mennyiségeknek nevezzük a számokat, és a számokat jelentő betűket.
Algebrai kifejezést kapunk, ha az algebrai mennyiségeket a négy alapművelet segítségével összekapcsoljuk.

A kifejezésben szereplő betűket változónak, a számokat együtthatónak nevezzük.

Polinomoknak nevezzük az egy ismeretlenes algebrai kifejezéseket.

Kitevő szerint csökkenő sorrendbe rendezzük a tagokat. A változó legnagyobb kitevőjét a polinom fokszámának nevezzük.

Ha a kifejezésben nincsen tört, vagy a tört nevezőjében nincs változó, akkor algebrai egész kifejezésről beszélünk. Pl.:

$$2x^2y; \qquad 0{,}3ab; \qquad \frac{2}{3}c; \qquad \frac{x}{5}; \qquad x:5$$

Ha a kifejezés nevezőjében is van változó, akkor algebrai törtkifejezésről beszélünk.
Pl.:

$$\frac{2x^2y+4}{x+1}; \qquad \frac{0{,}3ab}{c}; \qquad \frac{2}{3x}; \qquad \frac{5}{x}; \qquad 5:x$$

A törtkifejezés ott nincs értelmezve, ahol a nevező 0.

Máshogy is lehet osztályozni az algebrai kifejezéseket:

Ha a kifejezés tartalmaz összeadást vagy kivonást, akkor többtagú kifejezésről beszélünk.

A kifejezésekkel is a valós számok műveleti szabályai szerint dolgozhatunk.

Két kifejezés egynemű, ha csak az együtthatójukban különböznek.

$$7a^2b-5ab^2+3a+b-a-4a^2b=3a^2b-5ab^2+2a+b$$

Csak az egynemű algebrai kifejezéseket lehet összevonni.

Szorzattá alakítás:

1. Szorzattá alakítás kiemeléssel:

$$ac+bc=c\cdot(a+b)$$
$$15ay+10xy=5y\cdot(3a+2x)$$

2. Szorzattá alakítás csoportosítással: $ac+bc+ad+bd=c\cdot(a+b)+d\cdot(a+b)=(a+b)\cdot(c+d)$

Oszthatóság

Az a osztója b-nek, ha van olyan egész szám, amivel a-t szorozva b-t kapok. (Az a osztója b-nek, ha egész számszor megvan benne.)

Ha $a|b$, akkor a b többszöröse az a-nak.

Az osztás tulajdonságai:

1. $a|1 \Rightarrow a=1$
2. $\forall\, a \in N \;\Rightarrow\; a|a$
3. $a|b$ és $b|a \Rightarrow a=b$
4. $a|b$ és $a|c \Rightarrow a|\, b\pm c$
6. $a|\, b\pm c$ és $a|b \Rightarrow a|c$
7. $a|b$ és $b|c \Rightarrow a|c$ (az osztás tranzitív)

Oszthatósági szabályok:

– Kettővel oszthatók a páros számok.
– Hárommal oszthatók azok a számok, amelyek számjegyeinek összege osztható hárommal.
– Néggyel oszthatók azok a számok, amelyeknek az utolsó két számjegyéből álló szám osztható néggyel.

– Öttel oszthatók azok a számok, amelyek 0-ra vagy 5-re végződnek.
– Hattal oszthatók azok a számok, amelyek párosak és a számjegyeik összege osztható hárommal.
– Nyolccal oszthatók azok a számok, amelyeknél az utolsó 3 számjegyből álló szám osztható nyolccal.
– Kilenccel oszthatók azok a számok, amelyek számjegyeinek összege osztható kilenccel.
– Tizeneggyel oszthatók azok a számok, amelyek számjegyeit váltakozó előjellel összeadva 11-gyel osztható számot kapunk.

A prímszámok

A prímszámok azok a számok, amelyeknek pontosan két osztója van. Az 1 nem prímszám.

Összetett számok azok a számok, amelyeknek van valódi osztójuk. (Nem csak 1-gyel és önmagukkal oszthatók)
A prímtényezős felbontás: $60 = 10 \cdot 6 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

A számelmélet alaptétele: Bármely összetett szám (a tényezők sorrendjétől eltekintve), csak egyféleképpen bontható fel prímszámok szorzatára.

A prímszámokat meghatározhatjuk pl. az Eratosztenészi-szitával.

Az „a” akkor és csak akkor osztója „b”-nek, ha az „a” össze prímtényezője szerepel a „b” prímtényezős felbontásában.

A legnagyobb közös osztó meghatározása: Két vagy több szám legnagyobb közös osztóját úgy határozhatjuk meg, hogy vesszük a számok prímtényezős felbontását, kiválasztjuk a közös prímtényezőket és az előforduló legkisebb kitevőn összeszorozzuk őket.

Ha a két szám legnagyobb közös osztója 1, akkor relatív prímek. (Nincs közös prímtényezőjük!)

Legkisebb közös többszörös meghatározása: Két vagy több szám legkisebb közös többszörösét úgy határozhatjuk meg, hogy vesszük a prímtényezős felbontásokban szereplő prímtényezőket az előforduló legnagyobb kitevőn, és összeszorozzuk.