

Alapfogalmak

A síknak véges sok pontjából és az őket összekötő vonalakból álló alakzatokat **gráfnak** nevezzük. A pontok a gráf pontjai (vagy **csúcsai**), az összekötő vonalak a gráf **élei**.

Ha a gráf valamely két csúcsát egynél több él köti össze, akkor azt **többszörös élnek** nevezzük.

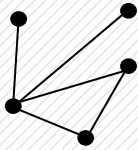
Def.: **Hurokélnak** nevezzük az olyan élt, amelynek a két végpontja ua.



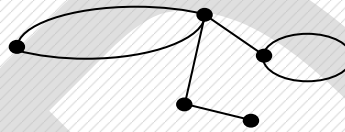
Def.: Egy gráfot **egyszerű gráfnak** nevezünk, ha véges (azaz pontjainak és éleinek a száma véges), és sem hurokért, sem többszörös élt nem tartalmaz.



PI. **Egyszerű gráf**



PI. **Nem egyszerű gráf**



Def.: Egy gráf **egy pontjának a fokszáma (foka)** a pontban található élek száma.

Ha egy pontban nincs él, azt a pontot **izolált pontnak** nevezzük. Az izolált pont fokszáma 0.

Tétel: Minden gráfban a pontok fokszámának összege az élek számának kétszerese.

Következmények:

Minden gráfban a pontok fokszámának összege páros szám. (Naná! Bármely egész szám kétszerese páros.)

Minden gráfban a páratlan fokú pontok száma páros. (Naná! Páratlan egész számok összege csak akkor páros, ha páros darabszámút adunk össze. Pl. $1 + 3 = 4$; $1 + 3 + 5 = 9$)

$$\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

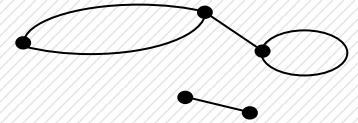
Tétel: Az n pontú teljes gráf éleinek a száma:

Def.: Egy gráf összefüggő, ha bármely pontjából bármely pontjába eljuthatunk egy úton.

Összefüggő gráf:



Nem összefüggő gráf:



Def. **séta**: Sétának nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben ugyanazok az élek és pontok többször is előfordulhatnak.

Def.: **Vonalnak** nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben minden él legfeljebb egyszer fordulhat elő, de lehetnek olyan pontok, amelyek többször is előfordulnak.

Def.: **Euler-vonalnak** nevezzük a gráfban az élek egy olyan egymáshoz csatlakoztatott bejárását, melynek során minden élen pontosan egyszer haladunk keresztül. Ha e bejárás során a kiindulópont megegyezik a végponttal, akkor az Euler-vonal zárt, ha a kiindulópont és a végpont nem azonos, akkor az Euler-vonal nyitott.

Tétel: Egy összefüggő gráfban akkor és csak akkor van zárt Euler-vonal, ha minden pont fokszáma páros.

Tétel: Egy összefüggő gráfban akkor és csak akkor van nyílt Euler-vonal, ha két pont fokszáma páratlan, a többi pont fokszáma pedig páros.