Másodfokú egyenletek–összefoglalás

1. Hiányos és spec. másodfokú egyenletek

A másodfokú egyenletek általános alakja: $ax^2 + bx + c = 0 \quad a,b,c \in R \quad a \neq 0$

Hiányos az egyenlet, ha b = 0, vagy c = 0!

Ha b = 0, akkor ki lehet fejezni az x-t! Mintafeladatok:		Ha c = 0, akkor kiemeléssel is dolgozhatsz. Mintafeladatok:	
$2x^2 - 32 = 0$	$x^2 + 17 = 0$	$x^2 + 5x = 0$	$-2x^2 + 11x = 0$

Speciális eset pl., ha teljes négyzetté alakítható az egyenlet. Mintafeladatok:	
$x^2 + 4x + 4 = 0$	$-2x^2 + 12x = -18$

2. A megoldóképlet

Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a,b,c \in R \quad a \neq 0)$ alakú másodfokú egyenletek megoldását az $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ megoldóképlet adja meg.

Mintafeladatok:		
$x^2 - 4x + 4 = 0$ $a = 1 \quad b = -4 \quad c = 4$ $x_{1;2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \dfrac{4 \pm 0}{2} = 2$	$x^2 + 3x + 18 = 0$ $a = 1 \quad b = 3 \quad c = 18$ $x_{1;2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 18}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-63}}{2}$ $\nexists x \in R$	$x^2 - 5x + 4 = 0$ $x_{1;2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$ $x_1 = \dfrac{5+3}{2} = 4$ $x_2 = \dfrac{5-3}{2} = 1$
Ha a kifejezés teljes négyzet, akkor a megoldóképletben 0 van a gyök alatt és az egyenletnek a két gyöke egybeesik.	Ha a megoldóképletben negatív szám van a gyök alatt, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke.	Ha a megoldóképletben pozitív szám van a gyök alatt, akkor az egyenletnek két különböző valós gyöke van.

3. A diszkrimináns

A megoldóképletben a gyök alatti kifejezéstől függ, hogy a másodfokú egyenletnek hány valós gyöke van, ezért diszkriminánsnak nevezzük. $D := b^2 - 4ac$

I. Ha a diszkrimináns pozitív, akkor a másodfokú egyenletnek két különböző valós gyöke van. $D > 0 \Rightarrow \exists x_1 \neq x_2 \in R$

II. Ha a diszkrimináns 0, akkor a másodfokú egyenlet két gyöke egybeesik. $D = 0 \Rightarrow \exists x_1 = x_2 \in R$

III. Ha a diszkrimináns negatív, akkor a másodfokú egyenletnek nincs valós gyöke. $D < 0 \Rightarrow \nexists x \in R$

4. Másodfokú egyenletek

Gyakorló feladatok:

1. $(7x-11)^2 - (6x+5)(6x-5) + (2x+9)^2 = (5x-3)^2 + 10$ (2;–13)

2.) $\frac{x+4}{3}=\frac{2x+1}{x}$ $(3;-1)$	3.) $\frac{(x-11)^2}{10}-\frac{(6x-1)^2}{5}=7-\frac{7x-3}{2}$ $(1;-\frac{34}{71})$
4.) $\frac{-3x^2+x}{3x^2-4x+1}=3$ $(\frac{3}{4};\frac{1}{3}$ Hamis gyök!)	5.) $\frac{12}{x}-\frac{7x-6}{6}+5x-26=0$ $(6;\frac{12}{23})$

5. Másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenletek:

Ha az egyenletben csak egy ismeretlen hatványa és annak a négyzete szerepel, akkor vissza tudjuk vezetni másodfokú egyenletre.

Gyakorló feladatok:

1.) $3x^4-7x^2+2=0$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$	2.) $x^6-7x^3-8=0$ $(-1;2)$

7. Másodfokú egyenletrendszerek

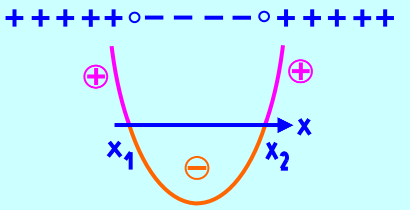
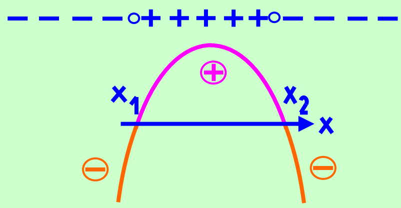
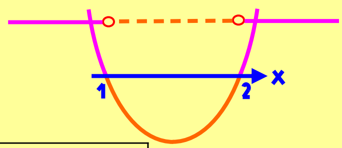
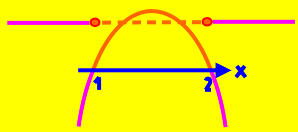
Általában a behelyettesítő módszer a nyerő!

Gyakorló feladatok:

1.) $\begin{cases} x+y=7 \\ \underline{xy=-18} \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x_1=-2 & y_1=9 \\ x_2=9 & y_2=-2 \end{pmatrix}$	2.) $\begin{cases} x^2+4y^2=17 \\ \underline{xy=2} \end{cases}$ $\begin{pmatrix} y_1=0{,}5; & x_1=4; & y_2=-0{,}5; & x_2=-4 \\ y_3=2; & x_3=1; & y_4=-2; & x_4=-1 \end{pmatrix}$

8. Másodfokú egyenlőtlenségek

A leggyorsabb, ha megkeressük a zérushelyeket és vázoljuk a parabolákat.

<table>
<tr><td colspan="2">1. Két különböző zérushely van (pozitív a diszkrimináns):</td></tr>
<tr><td>a.) Ha a főegyüttható pozitív, akkor a parabola felfelé nyílik. $a>0 \Rightarrow$ A parabola felfelé nyílik.

A függvényérték a két zérushely között negatív
A függvényérték a két zérushelyen kívül pozitív</td>
<td>b.) Ha a főegyüttható negatív, akkor a parabola lefelé nyílik. $a<0 \Rightarrow$ A parabola lefelé nyílik.

A függvényérték a két zérushelyen kívül negatív.
A függvényérték a két zérushely között pozitív.</td></tr>
<tr><td>$\text{Pl.: } x^2-x-2>0$
$\text{ZH: } x_{1;2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-2)}}{2}=\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\end{cases}$

$\boxed{x<1 \quad \text{v} \quad 2<x}$</td>
<td>$\text{Pl.: } -x^2+x+2\ge 0$
$\text{ZH: } x_{1;2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-2)}}{-2}=\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\end{cases}$

$\boxed{1\le x\le 2}$</td></tr>
</table>

2. A két zérushely egybeesik (nulla a diszkrimináns)
3. Nincs zérushelye (negatív a diszkrimináns)

Gyakorló feladatok:

1. $(2-3x)-(x-1)<-4-(x-2)^2$ $\left(4-\sqrt{5}<x<4+\sqrt{5}\right)$

2. $\dfrac{2}{x^2-4x-5}\le 0$ $(-1<x<5)$

5. A gyöktényezős alak

$$ax^2+bx+c=0 \quad a\neq 0 \text{ esetén } a(x-x_1)(x-x_2)=0$$

Mire használhatjuk?

A. Szorzattá alakíthatjuk a kifejezést vagy az egyenletet (pl. egyszerűsítéshez).

Pl. Bontsa fel elsőfokú tényezők szorzatára a $2x^2-5x-3$ polinomot! $2(x-3)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

Gyakorló feladat:

2. Bontsa fel elsőfokú tényezők szorzatára az x^2+6x+5 kifejezést!

B. Ha ismerjük az egyenlet két gyökét, akkor kereshetünk olyan egyenletet, aminek az ismert gyökök a megoldásai.

Pl. Írjon fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei $x_1=-\dfrac{3}{10}$ és $x_2=-\dfrac{2}{5}$! $(50x^2+35x+6=0)$

10. Négyzetgyökös egyenletek

A négyzetre emelt egyenlet magasabb fokú, mint az eredeti egyenlet, ezért több megoldása lehet, mint az eredetinek. A négyzetre emelt egyenlet megoldásai között ott vannak az eredeti egyenlet megoldásai is, de nem mindig csak azok (ezek a hamis gyökök). Ellenőrzéssel ki tudjuk válogatni az eredeti egyenlet megoldásait!

Mintafeladatok:

1.) $2\sqrt{x}+5=\sqrt{x}+4$	2.) $x-\sqrt{25-x^2}=7$
3.) $\sqrt{28-x-x^2}=4$	