Valószínűségszámítás
Összefoglalás

Alapfogalmak

A **véletlen jelenség**ek azok a jelenségek, amelyek kimenetele az ismert feltételekből nem határozható meg egyértelműen. Van oka a jelenségnek, csak még nem sikerült megismerni, vagy olyan sok dologtól függ, hogy nem tudjuk számítással modellezni.

Kísérletnek lehet tekinteni minden olyan véletlenszerű jelenséget, amit ugyanolyan körülmények között akárhányszor megismételhetünk. A kísérlet minden eredményének egyértelműen meghatározhatónak kell lennie. Pl. feldobunk egy kockát, vagy egy pénzérmét.

A kísérlet lehetséges kimeneteleit **elemi esemény**eknek nevezzük.

A kockadobásnál 6 elemi esemény lehetséges.

Az elemi események halmazát **eseménytér**nek nevezzük. Jele: H

Az eseményeket nyomtatott nagybetűkkel jelöljük.

Lehetetlen esemény ($\emptyset$): sohasem következhet be a kísérlet folyamán.

Pl. kockával 30-t dobunk.

Biztos esemény (I): mindig bekövetkezik.

Pl. kockával legfeljebb hatost dobunk.

Műveletek eseményekkel

Egyenlő események: Két eseményt azonosnak tekintünk, ha egy kísérlet minden lehetséges kimenetelét figyelembe véve vagy mindkettő bekövetkezik, vagy egyik sem.

Ha két esemény A és B olyan kapcsolatban van egymással, hogy A csak akkor következhet be, ha B is bekövetkezik, akkor azt mondjuk, az **„A" esemény maga után vonja a „B" eseményt.** Jele: $A \subset B$

Ellentett (komplementer) esemény ($\overline{A}$) csak akkor következhet be, ha az A esemény nem következik be.

Pl. A = páratlan számot dobtunk. $\overline{A}$ páros számot dobtunk.

B = Legfeljebb kettest dobtunk. $\overline{B}$ kettőnél nagyobb számot dobtunk.

Az A esemény komplementerét az eseménytér azon elemei alkotják, amelyek az A-ban nincsenek benne.

(Pl. kockadobásnál: $A = \{1, 2\}$; $\overline{A} = \{3, 4, 5, 6\}$)

Nyilvánvaló, hogy minden esemény komplementerének a komplementere önmaga. $\overline{\overline{A}} = A$

A biztos esemény komplementere a lehetetlen esemény.

A lehetetlen esemény komplementere a biztos esemény.

Def. **események összege**: A és B események összege az az esemény, amelyik akkor következik be, ha az A és a B közül legalább az egyik bekövetkezik.

Pl. : {3} + {4, 5} = {3, 4, 5}

Végezze el! $A + I =$ $A + \emptyset =$ $A + A =$

Tétel: Minden esemény előállítható elemi események összegeként.

Def. események szorzata: Két esemény szorzata az az esemény, amelyik akkor következik be, ha A is és B is bekövetkezik. (Mindkét esemény bekövetkezik.)

Def. események különbsége: Két esemény különbsége A-B az az esemény, amelyik akkor következik be, ha A bekövetkezik de B nem.

Def. egymást kizáró események: olyan események, amelyek egyszerre nem következhetnek be.

Az eseményekkel végezhető műveleteket összefoglalóan Boole–algebrának hívják.

Műveleti tulajdonságok

Egy A eseményre vonatkozóan az alábbi műveletek végezhetők el:

Összeadás	Szorzás	Komplementer művelet	
$A + A = A$	$A \cdot \emptyset = \emptyset$	$\overline{I} = \emptyset$	$A + \overline{A} = I$
$A + I = I$	$A \cdot A = A$	$\overline{\emptyset} = I$	$A \cdot \overline{A} = \emptyset$
$A + \emptyset = A$	$A \cdot I = A$	$\overline{\overline{A}} = A$	

Az eseményekkel végezhető műveleteket összefoglalóan Boole–algebrának hívják.

A gyakorlatban leginkább a logikai áramkörökben fontosak a de Morgan azonosságok:

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \quad \text{és} \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Ezek a kifejezések több tagra is érvényesek és kiterjeszthetők.

Def.: Egy A esemény összetett vagy felbontható esemény, ha legalább két, tőle különböző esemény összegeként egyértelműen előállítható.

Def.: Az $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ események teljes eseményrendszert képeznek, ha igazak rájuk az alábbi feltételek:

a) Együtt kiadják az eseményteret: $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = I$

b) Bármely kettő egyszerre nem következhet be:

$$A_i \cdot A_j = \emptyset \qquad \text{ha } i \neq j \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n \ \text{ és } \ j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

A valószínűség fogalma

Ha a gyakoriságot elosztjuk a sokaság elemeinek a számával, akkor a relatív gyakoriságot kapjuk meg. Azt a számot, amely körül az esemény relatív gyakorisága ingadozik az esemény valószínűségének nevezzük. Az A esemény valószínűségét P(A)-val jelöljük.

A Kolmogorov–axiómák és következményeik

Egy esemény valószínűségére az alábbiak érvényesek:

1.) $0 \le P(A) \le 1$

Egy esemény valószínűsége csak 0 és 1 közötti szám lehet, mert a relatív gyakoriság értéke 0 és egy közé esik.

2.) $P(Ø) = 0$ A lehetetlen esemény valószínűsége 0. (A relatív gyakorisága 0/akármi = 0)

3.) $P(I) = 1$ A biztos esemény valószínűsége 1.

4.) Ha az A és B egymást kizáró események (vagyis $A \cdot B = Ø$) akkor az A és B eseményekre igaz:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

5.) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Az axiómák következményei:

a.) Ha az A esemény maga után vonja a B eseményt, akkor a valószínűségeikre teljesül, hogy:

$$P(A) \le P(B)$$

b) Az A eseményre és ellentettjére az $\overline{A}$ -ra igaz, hogy: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

c) Két esemény független egymástól, ha szorzatukra igaz, hogy $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

d) Ha az $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ események páronként kizárják egymást, akkor igaz az alábbi felbontás:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$$

Ennek az additivításnak egy fontos esete az, ha a $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor: $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n) = 1$

A klasszikus valószínűségi modell

Ha az elemi események valószínűsége megegyezik, akkor egy esemény bekövetkezésének valószínűségét megkapjuk, ha a kedvező esetek számát elosztjuk az összes esetek számával. (De néha problémás belátni, hogy az egyes elemi események valószínűsége tényleg megegyezik-e.)

$$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$$