Trigonometria I

A hegyes szögű definíciók:

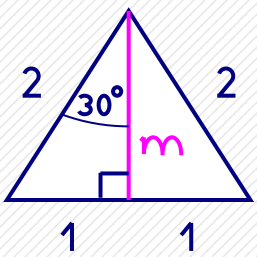
A szög szinuszának nevezzük a szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosát (arányát).

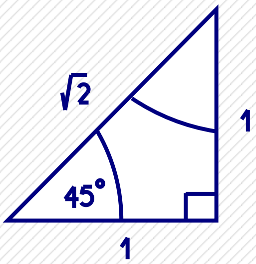
Koszinus α–nak nevezzük a szög melletti befogó és az átfogó hányadosát (arányát).

A szög tangensének nevezzük a szöggel szemközti befogó és a szög melletti befogó hányadosát (arányát).

Kotangens α–nak nevezzük a szög melletti befogó és a szöggel szemközti befogó hányadosát (arányát).

A nevezetes szögek szögfüggvényei:

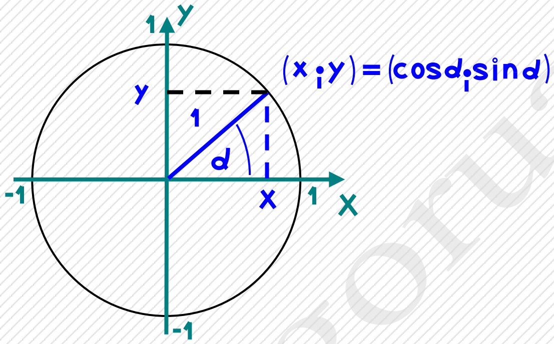




	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

A derékszögű háromszögek segítségével megoldható feladatok

Kiterjesztés a teljes szögtartományra



Def.: Egy tetszőleges α szög szinuszán az egységkör α forgásszögű pontjának a második koordinátáját értjük.

Def.: Egy tetszőleges α szög koszinuszán az egységkör α forgásszögű pontjának az első koordinátáját értjük.

A tangens és a kotangens függvényeket a már ismert összefüggés alapján definiáljuk:

$$\text{tg}\,\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{ctg}\,\alpha := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

A szögfüggvényekre vonatkozó Pitagorasz-tétel:

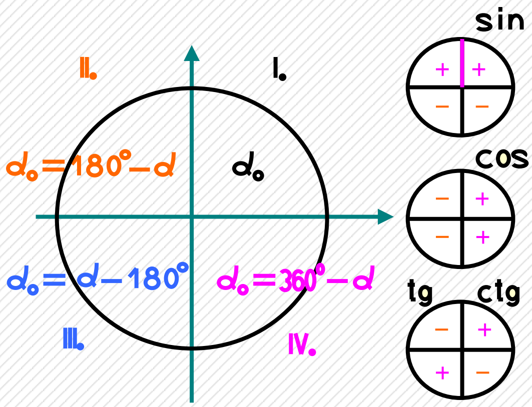
Tétel: Ha bármely szög szinuszát és koszinuszát négyzetre emeljük, és a négyzeteket összeadjuk, akkor egyet kapunk.

$$\forall\alpha\in R \qquad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

Kikeresés:



$\sin 120^o = \sin(180^o - 120^o) = \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

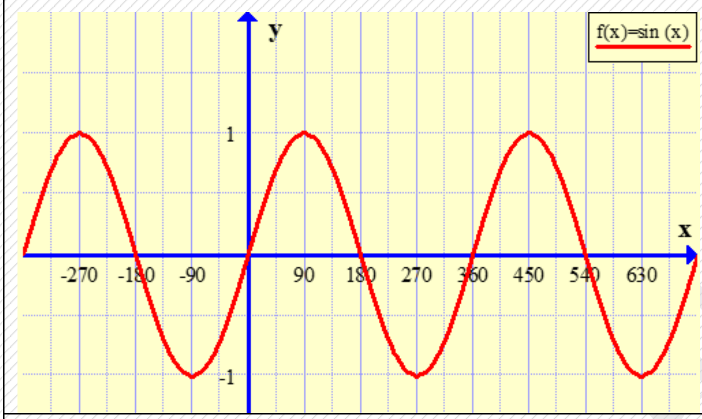
$\cos 225^o = -\cos(225^o - 180^o) = -\cos 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg}\, 120° = -\text{tg}\, 60° = -\sqrt{3}$

$\text{ctg}\, 225^o = \text{ctg}\,(225^o - 180^o) = \text{ctg}\, 45^o = 1$

A szögfüggvények ábrázolása és elemzése:

A szinusz függvény



$D_f = R$

$R_f = [-1;1]$

$ZH: 0° + n \cdot 180° \quad k;n \in Z$

$P = 360^o = 2\pi$ rad

Sz.é.: $\min(270° + k \cdot 360°; -1)$

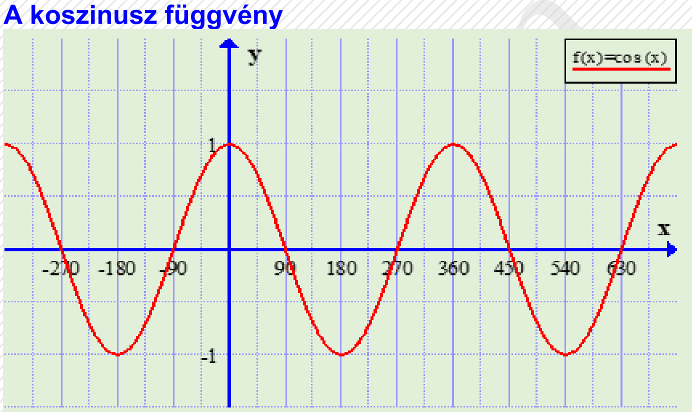
$\max(90° + k \cdot 360°;\ 1)$

SZMN: $]-90° + k \cdot 360°;\ 90° + k \cdot 360°[$

SZMCS: $]90° + k \cdot 360°;\ 270° + k \cdot 360°[$

páratlan fv. $\quad /\ \sin(-x) = -\sin x\ /$

A koszinusz függvény



$D_f = R$

$R_f = [-1;1]$

$ZH: 90° + n \cdot 180° \quad k;n \in Z$

$P = 360^o = 2\pi$ rad

Sz.é.: $\min(180° + k \cdot 360°; -1)$

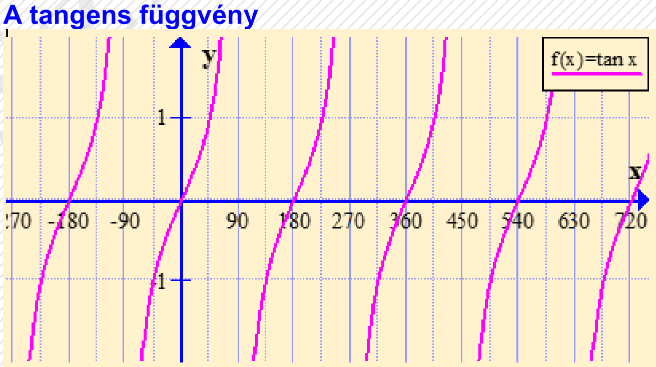
$\max(0° + k \cdot 360°;\ 1)$

SZMN: $]180° + k \cdot 360°;\ 360° + k \cdot 360°[$

SZMCS: $]0° + k \cdot 360°;\ 180° + k \cdot 360°[$

páros fv. $\quad /\ \cos(-x) = \cos x\ /$

A tangens függvény



ÉT: $x \neq 90° + k \cdot 180° \qquad k \in Z$

ÉK: R

ZH: $x = 0° + k \cdot 180°$

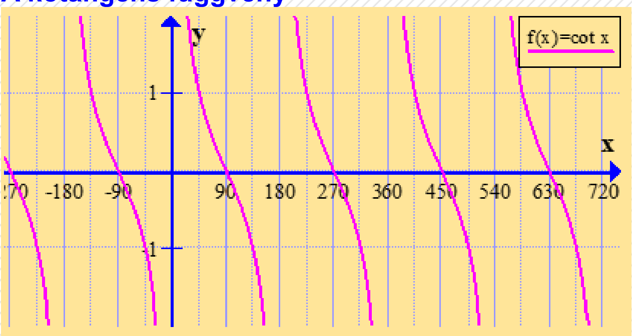
Sz.é.: –

P: 180°

SZMN: $-90° + k \cdot 180° < x < 90° + k \cdot 180°$

páratlan

A kotangens függvény



ÉT : $x \neq 0° + k \cdot 180°$ $\quad k \in Z$

ÉK : R

ZH : $x = 90° + k \cdot 180°$

Sz.é. : –

P : 180°

SZMCS : $0° + k \cdot 180° < x < 180° + k \cdot 180°$

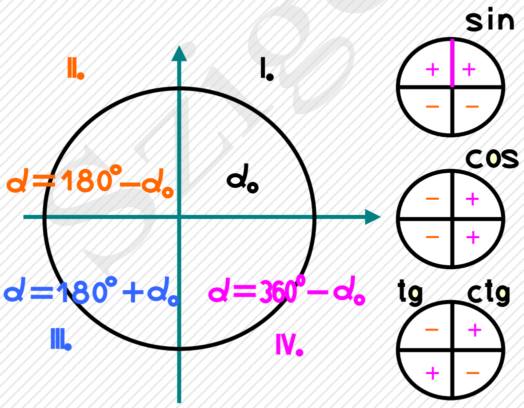
páratlan

Függvény transzformációk

Alapfüggvény: f(x) $\quad c \in R^+$

1. **f(x)+c**	Minden helyen c-vel növekedik a függvény értéke, ezért **az f(x) függvény grafikonját c-vel feltoljuk** az y tengely mentén.
2.– f(x)	Minden helyen ellentettjére változik a függvény értéke, ezért **az f(x) függvény grafikonját tükrözzük az x tengelyre.**
3. c· f(x)	Minden helyen c- szeresére nő a függvény értéke, ezért az **f(x) függvény grafikonját c- szeresére nyújtjuk az y tengely mentén.**
4. f(x+c)	Ez a függvény c-vel kisebb helyen veszi fel ugyanazt az értéket, mint amit az f(x) függvény az x helyen felvesz. Ezért az **f(x) grafikonját el kell tolni c-vel balra az x tengely mentén.**
5. f(–x)	Ez a függvény ellentett helyen veszi fel ugyanazt az értéket, mint amit az f(x) függvény az x helyen felvesz. Ezért az **f(x) grafikonját tükrözzük az tengelyre.**
6. f(c·x)	Ez a függvény c-szer kisebb helyen veszi fel ugyanazt az értéket, mint amit az f(x) függvény az x helyen felvesz. Ezért az **f(x) grafikonját 1/c-szeresére nyújtjuk az x tengely mentén.**
7. f(c·x+a) $f(x) = \sqrt{2x+4} = \sqrt{2(x+2)}$	A $\sqrt{x}$ grafikonját 2-vel balra toljuk, és az x =–2 egyeneshez a felére zsugorítjuk az x tengely mentén.

Visszakeresés:



$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 30° + k \cdot 360°$$

$$x_2 = 150° + l \cdot 360° \qquad l,k \in Z$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_0 = 60°$$

$$\alpha_1 = 180° - 60° + k \cdot 360° = 120° + k \cdot 360°$$

$$\alpha_2 = 60° + 180° + l \cdot 360° = 240° + l \cdot 360°$$

$$k;\, l \in Z$$

$$\text{Ell.}: \cos(120°) = -\cos 60° = -0{,}5$$

Trigonometrikus egyenletek
Trigonometrikus egyenlőtlenségek