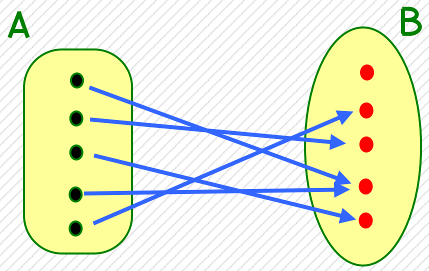
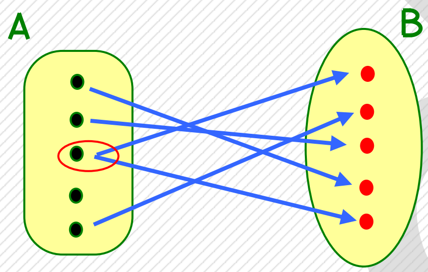
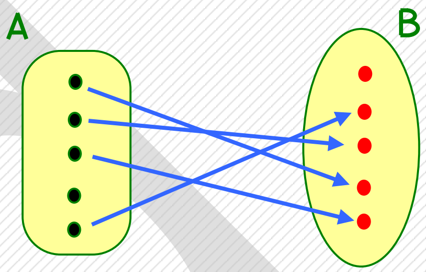
Hozzárendelések

A és B halmaz között hozzárendelést létesítünk, ha megadjuk, hogy az A halmaz egyes elemeihez melyik B-ben lévő elemet rendeltük.
$A \mapsto B$

Egyértelmű a hozzárendelés, ha az A halmaz mindegyik eleméhez csak egy elemet rendelek a B-ből. (Másképpen: az A halmaznak nincs olyan eleme, amelyhez több B-beli elemet rendelünk.)	Ha az A halmaznak csak egy olyan eleme is van, amelyhez több elemet rendeltünk a B-ből, akkor nem egyértelmű a hozzárendelés.	A hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, ha a fordítottja is egyértelmű.
		

Függvények

Függvénynek nevezzük az egyértelmű hozzárendeléseket. A függvény értelmezési tartományának nevezzük az A halmaz azon részhalmazát, amelynek minden eleméhez hozzárendelünk egy B-beli elemet. Jele: ÉT vagy D_f
A függvény értékkészlete a B halmaz azon részhalmaza, amelyeknek minden elemét hozzárendeltük az értelmezési tartomány elemeihez. Jele: ÉK vagy R_f

Függvény megadható:

1. Utasítással0 2. Táblázattal 3. Formulával 4. Nyíl diagrammon 5. Grafikonon

A függvények elemzése

ÉT (Értelmezési tartomány)
Ék (Értékkészlet)
P (Periódus – 10.oszt)
ZH (Zérushely)
SzÉ (Szélsőérték)
Monotonitás
Paritás

f: $A \mapsto B$

A függvény értelmezési tartományának nevezzük az A halmaz azon részhalmazát, amelynek minden eleméhez hozzárendelünk egy B-beli elemet. Jele: ÉT v D_f

A függvény értékkészlete a B halmaz azon részhalmaza, amelyeknek minden elemét hozzárendeltük az értelmezési tartomány elemeihez. Jele: ÉK v R_f

A zérus hely (ZH) az a hely, ahol a függvény értéke 0 (ahol a grafikonja az x tengelyt metszi).

A **periódus** (10.oszt): Ha a függvény értékei rendszeresen ismétlődnek, akkor azt mondjuk, hogy a fv. periodikus. Ilyenkor vannak olyan számok, amellyel bármely helyről arrébb menve ugyanazt az értéket találjuk. Ezek közül a legkisebbet nevezzük a fv. periódusának.
A fv. periódusa P, ha f(x+P) = f(x)   pl. a trigonometrikus függvények.

Szélső érték: Ha az egész értelmezési tartományt nézve van a függvénynek legkisebb értéke, akkor azt mondjuk, hogy minimuma van. Az a hely, ahol a fv. felveszi a legkisebb értéket az a **minimumhely.**
Ha az egész értelmezési tartományt nézve van a függvénynek legnagyobb értéke, akkor azt mondjuk, hogy maximuma van. Az a hely, ahol a fv. felveszi a legnagyobb értéket az a **maximumhely.**

Szigorúan monoton növekedő a függvény, ha nagyobb helyen mindig nagyobb értéket vesz fel.

Szigorúan monoton csökkenő a függvény, ha nagyobb helyen mindig kisebb értéket vesz fel.

Paritás: Egy függvény **páros**, ha ellentett helyen ugyanazt az értéket veszi fel. f(– x) = f(x) A páros függvények grafikonja tükrös az y tengelyre.   Pl.: IxI; x^2
Egy függvény **páratlan**, ha ellentett helyen ellentett értéket vesz fel. f(– x) = – f(x)   A páratlan függvények grafikonja tükrös az origóra.

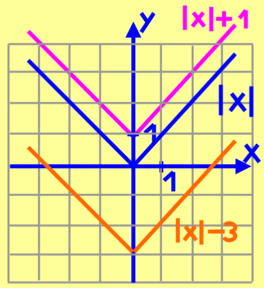
Pl. $f(x)=x;\ \ f(x)=\frac{1}{x};\ f(x)=\sin x;\ \ f(x)=\text{tg } x;\ \ f(x)=\text{ctg } x;\ \ f(x)=x^{2n+1}$ stb.

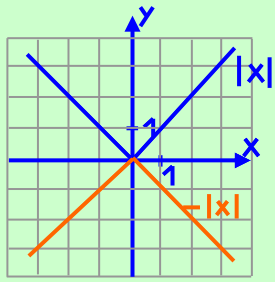
Függvény transzformációk

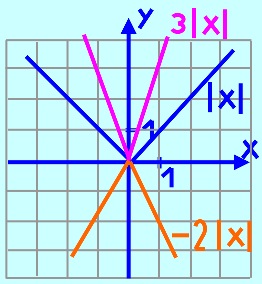
A korábbi tapasztalatok alapján foglaljuk össze a függvény transzformációkat!

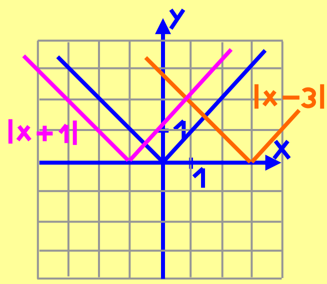
Az alap függvény: f(x) $c\in R^+$

<table>
<tr>
<td>1. f(x)+c

f(x) függvény grafikonját c-vel feltoljuk az y tengely mentén.</td>
<td></td>
<td>2. – f(x)

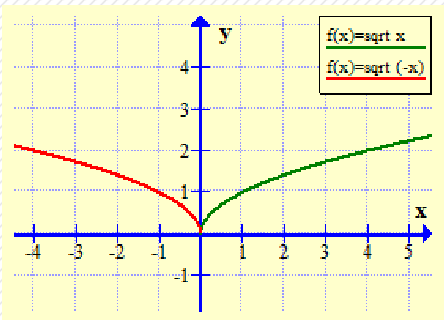
f(x) függvény grafikonját tükrözzük az x tengelyre.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>3. c·f(x)

f(x) függvény grafikonját c- szeresére nyújtjuk az y tengely mentén.</td>
<td></td>
<td>4. f(x+c)

f(x) grafikonját el kell tolni c-vel balra az x tengely mentén.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

10. osztályos transzformációk

5. f(–x) Pl.: $f(x)=\sqrt{-x};\qquad f(x)=\sin(-x)$

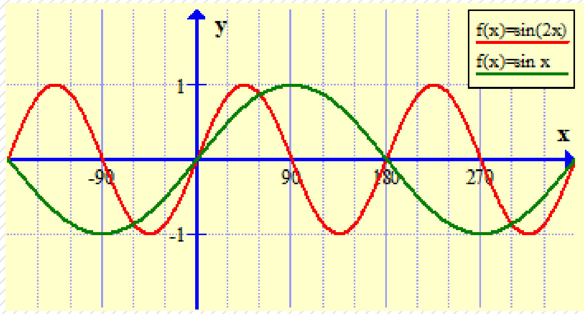


Ez a függvény ellentett helyen veszi fel ugyanazt az értéket, mint amit az f(x) függvény az x helyen felvesz. Ezért az **f(x) grafikonját tükrözzük az tengelyre.**

6. f(c·x)   Pl.:

$f(x)=\sqrt{2x}$; $f(x)=\cos 2x$; $f(x)=\sin(\frac{1}{2}x)$

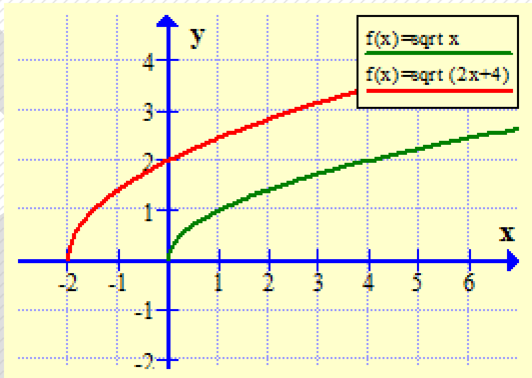
Ez a függvény c-szer kisebb helyen veszi fel ugyanazt az értéket, mint amit az f(x) függvény az x helyen felvesz. Ezért az f(x) grafikonját 1/c-szeresére nyújtjuk az x tengely mentén.



7. f(c·x+a)

Pl.: $f(x)=\sqrt{2x+4}$ (Emelt szintű trafó.)

$f(x)=\sqrt{2x+4}=\sqrt{2(x+2)}$ a $\sqrt{x}$ grafikonját 2-vel balra toljuk, és az y = –2 egyeneshez a felére zsugorítjuk az x tengely mentén.



!! Nem árt 2–3 helyen behelyettesítéssel ellenőrizni a transzformációt. (Néhány helyen kiszámolni a függvény értékét és a grafikonon megnézni, hogy stimmel-e!)

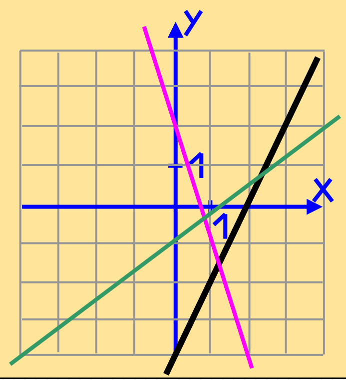
Alapfüggvények.

– **A konstans függvény.** A konstans függvény értéke minden helyen ugyanaz.

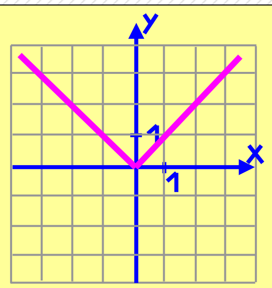
– **Elsőfokú függvények:**

Az elsőfokú függvények általános alakja: $y=mx+b$

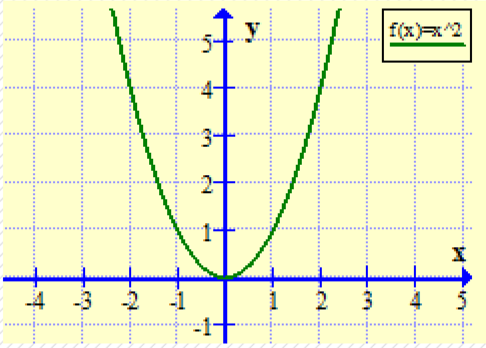
m a meredekség, b az egyenes y tengelymetszete

$x\mapsto 2x-4$ $x\mapsto -3x+2$ $x\mapsto \frac{3}{4}x-1$	 	ÉT: ÉK: ZH: Szé: Monotonitás Hol pozitív az értéke? Hol negatív az értéke? Hol vesz fel egy adott értéket?

– **Az abszolútérték-függvény**

$x\mapsto \|x\|$	Kétféle jelölést használhatunk az elemzésnél:		
 	D_f = R R_f = [0;∞[ZH: x = 0 SZMCS:]–∞;0[SZMN:] 0;∞ [páros	ÉT: R ÉK: y ≥ 0 ZH: x = 0 SZMCS: x < 0 SZMN: x > 0 páros	Tudni kell, hogy hol pozitív a függvény értéke, hol negatív a függvény értéke. Milyen tartományban vesz fel egy adott értéknél kisebb, ill. nagyobb értéket!

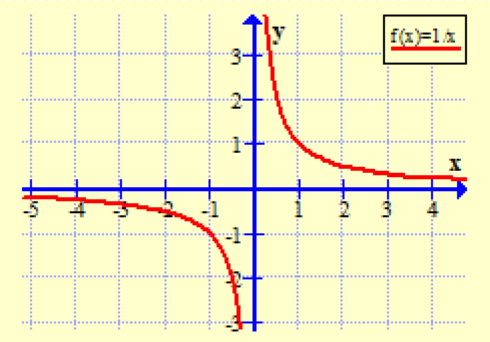
– A négyzet függvény



Alapfüggvény: $f(x) = x^2$
ÉT: R
ÉK: $y \geq 0$
ZH: x = 0
SZÉ: min (0;0)
SZMCS: x < 0
SZMN: x > 0
páros

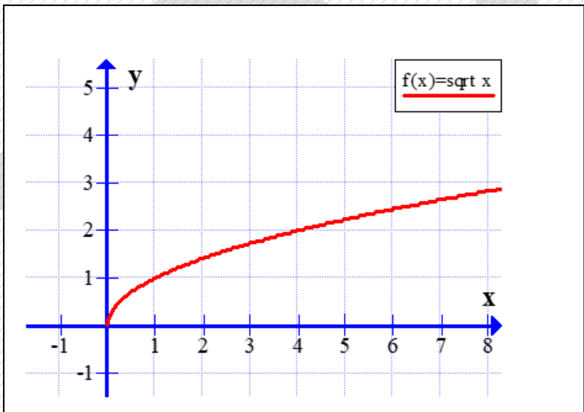
– Lineáris tört függvények

Törtfüggvények: alapfüggvény $x \mapsto \frac{1}{x}$

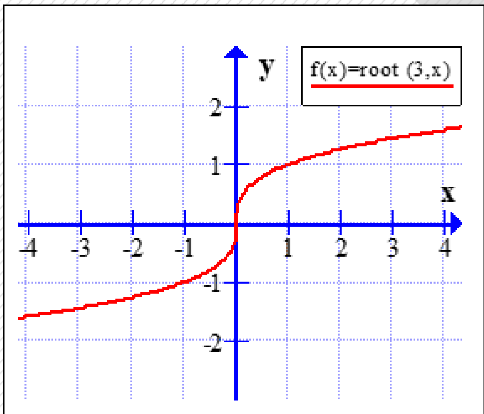
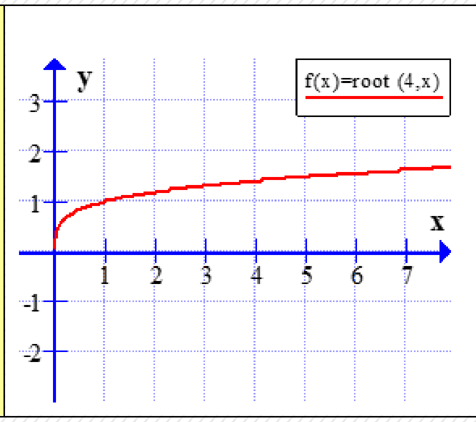
	$ÉT: x \neq 0$ $ÉK: y \neq 0$ ZH: – Sz.é.: – SZMCS Páratlan	$ÉT:]-\infty;0[\cup]0;\infty[$ $ÉK:]-\infty;0[\cup]0;\infty[$ ZH: – Sz.é.: – SZMCS Páratlan	$D_f = \{x \in R \mid x \neq 0\}$ $R_f = \{y \in R \mid y \neq 0\}$ ZH: – Sz.é.: – SZMCS Páratlan	$D_f = R \setminus \{0\}$ $R_f = R \setminus \{0\}$ ZH: – Sz.é.: – SZMCS Páratlan

10.–11. év

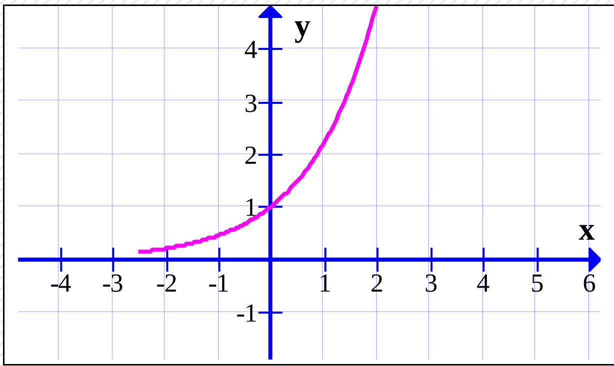
A négyzetgyök-függvény:

	$f(x) = \sqrt{x}$ $D_f = \{x \in R \mid x \geq 0\}$ $R_f = \{y \in R \mid y \geq 0\}$ ZH: x = 0 SZÉ: min(0;0) SZMN	$f(x) = \sqrt{x}$ ÉT: $x \geq 0$ ÉK: $y \geq 0$ ZH: x = 0 SZÉ: min(0;0) SZMN

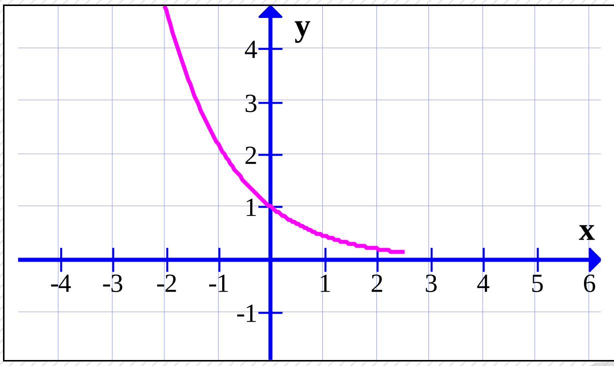
Az n-edik gyök függvények és tulajdonságaik:

	$f(x) = \sqrt[3]{x}$ ÉT: x ϵ R ÉK: y ϵ R ZH: x = 0 SZÉ: - SZMN páratlan fv.		$x \mapsto \sqrt[4]{x}$ ÉT: x ϵ R ÉK: y ≥ 0 ZH: x = 0 SZÉ: min.(0; 0) SZMCS: x < 0 SZMN: x > 0 páros fv.

Az exponenciális függvények és tulajdonságaik:

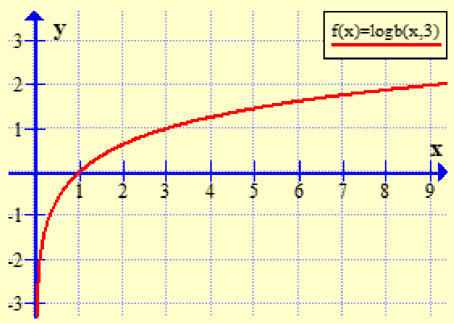


$x \mapsto a^x \quad a > 1$	$x \mapsto a^x \quad a > 1$
ÉT: $x \in R$	$D_f = R$
ÉK: $y \in R;\ y > 0$	$R_f = R^+$
ZH: –	$ZH: –$
SZÉ: –	$SZÉ.: –$
SZMN	SZMN



$x \mapsto a^x \quad 0 < a < 1$	$x \mapsto a^x \quad 0 < a < 1$
ÉT: $x \in R$	$D_f = R$
ÉK: $y \in R;\ y > 0$	$R_f = R^+$
ZH: –	$ZH: –$
SZÉ: –	$SzÉ.: –$
SZMCS	SZMCS

A logaritmus függvények és tulajdonságaik:



$f(x) = \log_a x$

$a > 1$

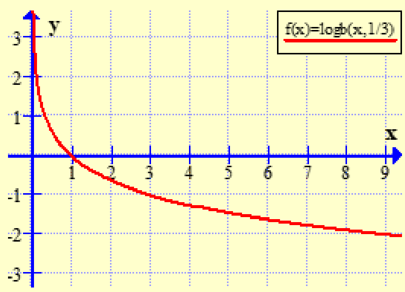
$ÉT: R^+$

$ÉK: R$

$ZH: x = 1$

$Sz.é.: –$

SZMN



$f(x) = \log_a x$

$0 < a < 1$

$ÉT: R^+$

$ÉK: R$

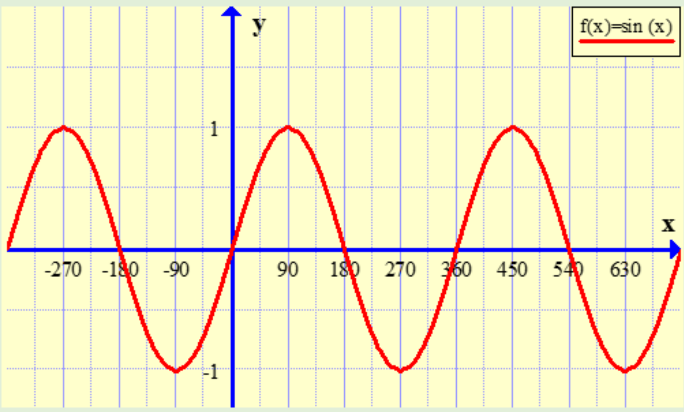
$ZH: x = 1$

$Sz.é.: –$

SZMCS

A trigonometrikus függvények:

$f(x) = \sin x$



$ÉT: x \in R$

$ÉK: -1 \le y \le 1$

$ZH: 0° + n \cdot 180° \quad k; n \in Z \quad (k = 0; \pm1; \pm2; ...)$

$P = 360° = 2\pi$ rad

$Sz.é.:$ min. hely: $x = 270° + k \cdot 360°$

min. érték: $y = -1$

max. hely: $x = 90° + k \cdot 360°$

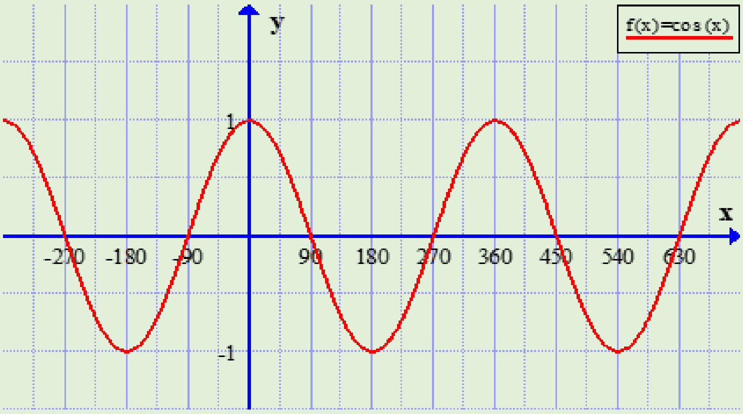
max. érték: $y = 1$

$SZMN: -90° + k \cdot 360° < x < 90° + k \cdot 360°$

$SZMCS: 90° + k \cdot 360° < x < 270° + k \cdot 360°$

páratlan fv. / $\sin(-x) = -\sin x$ /

f(x) = cos x



$D_f = R$

$R_f = [-1;1]$

$ZH: 0° + n \cdot 180° \quad k;n \in Z$

$P = 360^o = 2\pi$ rad

$Sz.é.: \min(180° + k \cdot 360°; -1)$

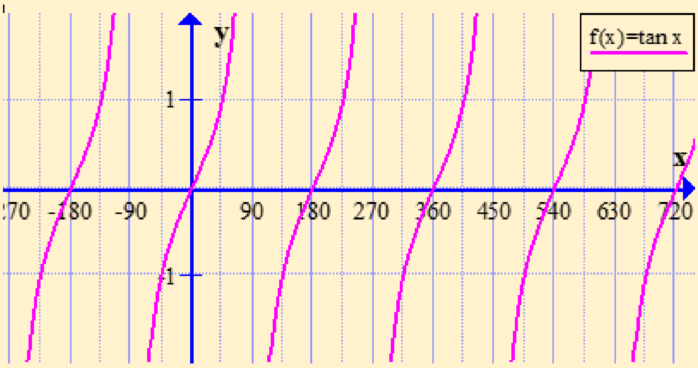
$\max(0° + k \cdot 360°;\ 1)$

$SZMN:]180° + k \cdot 360°;\ 360° + k \cdot 360°[$

$SZMCS:]0° + k \cdot 360°;\ 180° + k \cdot 360°[$

páros fv. / $\cos(-x) = \cos x$ /

A tangens függvény



$ÉT: x \neq 90° + k \cdot 180° \qquad k \in Z$

$ÉK: R$

$ZH: x = 0° + k \cdot 180°$

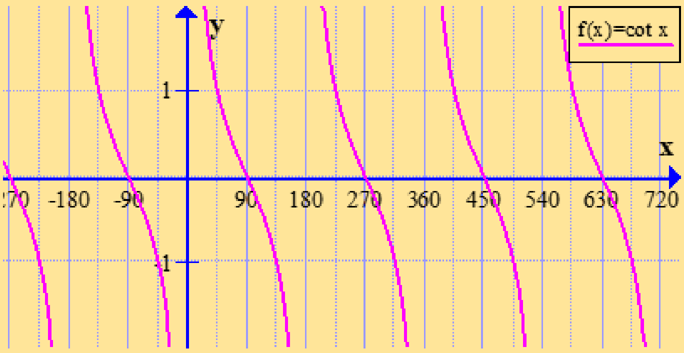
$Sz.é.: -$

$P: 180°$

$SZMN: -90° + k \cdot 180° < x < 90° + k \cdot 180°$

páratlan

A kotangens függvény



$ÉT: x \neq 0° + k \cdot 180° \qquad k \in Z$

$ÉK: R$

$ZH: x = 90° + k \cdot 180°$

$Sz.é.: -$

$P: 180°$

$SZMCS: 0° + k \cdot 180° < x < 180° + k \cdot 180°$

páratlan