1. Halmazok, halmazműveletek, ezek bemutatása természetes számokkal kapcsolatos problémákon

▶ *Halmazok megadása*

A halmazt alapfogalomnak tekintjük, így nincs definíciója. A halmazokat általában nagybetűkkel jelöljük (A, B, C...), a nevezetesek betűjét kiemeljük (**N**, **Z**, **Q**). A halmazok megadásának leggyakrabban használt módjai a következők:

- A (véges) halmazt elemeinek *felsorolásával* adjuk meg
  ↳ $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$
- Megadunk egy *utasítást*, amelynek alapján bármely dologról eldönthetjük, hogy eleme-e a halmaznak vagy sem.
  ↳ $D = \{n^2 \mid 1 \le n \le 10 \text{ és } n \in \mathbf{N}\}$
  ↳ F = {a 7-re végződő kétjegyű természetes számok}

▶ *Halmazok egyenlősége*

Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk egyenlőnek, ha az egyik halmaz elemei a másik halmaz elemeivel azonosak. Más szóval: az M és N halmaz akkor és csak akkor egyenlő, ha $a \in M$ esetén $a \in N$ is teljesül, és ha $a \notin M$, akkor $a \notin N$ is igaz.

▶ *Részhalmazok*

Az A halmazt a H halmaz részhalmazának nevezzük, ha az A halmaz minden eleme a H halmaznak is eleme. Jelölése: $A \subseteq H$.

Pl. a valós számok halmazának részhalmaza a racionális számok halmaza. Röviden: $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$, mert minden racionális szám egyben valós szám is. A definíció alapján minden halmaz önmagának is részhalmaza, valamint az üres halmaz részhalmaza minden halmaznak.

Az A halmazt a H halmaz valódi részhalmazának nevezzük, ha az A halmaz részhalmaza a H halmaznak, de nem egyenlő vele. Jelölése: $A \subset H$.

▶ *Halmazműveletek*

Két halmaz uniója azon elemek halmaza, melyek legalább az egyik halmazban benne vannak. Jele: $\cup$. Kommutatív, asszociatív művelet.

Két halmaz metszete azon elemek halmaza, melyek az adott halmazok mindegyikében benne vannak. Jele: $\cap$. Két halmaz diszjunkt, ha a metszetük üres halmaz. Kommutatív, asszociatív művelet.

Két halmaz különbsége azon elemek halmaza, melyek az első halmaznak elemei, ám a második halmaznak nem. Jele: \.

1. tétel folyt.

Az A és B halmazok szimmetrikus differenciájának nevezzük azon elemek összességét, melyek az A és B halmazok közül pontosan az egyiknek elemei. Jele: Δ.

Tekintsünk egy tetszőleges H alaphalmazt, melynek A részhalmaza. Ekkor az A halmaz H halmazra vonatkozó komplementer *(kiegészítő)* halmazán azon elemek összességét értjük, amelyek elemei a H halmaznak, de nem elemei az A halmaznak. $\{X: x \subset H \text{ és } x \notin A\}$ Jele: $\bar{A}$.

▶ ***Halmazműveleti azonosságok***

	Kijelentések	Halmazok	Események
Kommutativitás	$A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	$A \cdot B = B \cdot A$ $A + B = B + A$
Asszociativitás	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ $A + (B + C) = (A + B) + C$
Elemet változatlanul hagyó elem	$A \wedge i = A$ $A \vee h = A$	$A \cap U = A$ $A \cup \varnothing = A$	$A \cdot H = A$ $A + \varnothing = A$
Komplementerre vonatkozó azonosságok	$A \wedge \neg A = h$ $A \vee \neg A = i$	$A \cap \bar{A} = \varnothing$ $A \cup \bar{A} = U$	$A \cdot \bar{A} = \varnothing$ $A + \bar{A} = H$
Disztributivitás	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
Elnyelési azonosság	$A \wedge A = A$ $A \vee A = A$	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	$A \cdot A = A$ $A + A = A$
További azonosságok	$A \wedge h = h$ $A \vee i = i$ $\neg(\neg A) = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$ $\bar{\bar{A}} = A$	$A \cdot \varnothing = \varnothing$ $A + H = H$ $\bar{\bar{A}} = A$
A De Morgan-azonosságok	$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

▶ ***Alkalmazások: Halmazelmélet***

Matematikában:

- függvények értelmezési tartománya, értékkészlete
- egyenlőtlenségrendszerek megoldása
- geometriai szerkesztések a mértani hely módszerével
- valószínűségszámításban az események és a halmazok megfeleltetetőek

Egyéb:

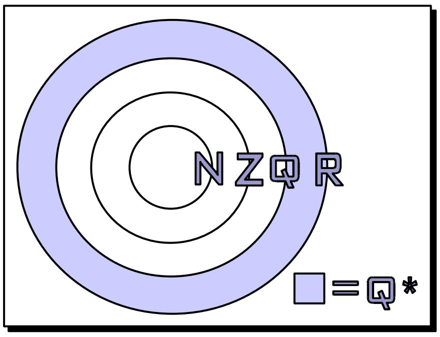
- Adatok gyűjtése, rendszerezése
- Biológiában a rendszertanban

▶ ***Tétel: Egy n elemű véges halmaz részhalmazainak száma 2^n.***

Mivel a halmaz elemeinek száma véges, sorszámozhatjuk az elemeket 1-től n-ig. Ha az i-edik elemet kiválasztjuk a részhalmazba, akkor ehhez az elemhez rendeljünk 1-et, ha nem, akkor 0-t. Így látható, hogy minden részhalmazhoz rendeltünk egy 0 és 1 számjegyekből álló n hosszúságú számsort, illetve minden számsorhoz tartozik egy részhalmaz, vagyis a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű *(üres részhalmaznak a csak 0-ból álló, az eredeti halmaznak a csak 1-esből álló számsor felel meg)*. Az így képzett n hosszúságú számsorok száma 2^n, tehát a részhalmazok száma is ennyi.

2. Számhalmazok (a valós számok halmaza és részhalmazai), halmazok számossága

▶ *Számhalmazok*



<u>Természetes számok:</u> Jel: **N**
N = $\mathbf{Z}^+$ + {0}, vagyis természetes szám a nulla és az összes pozitív egész szám.

<u>Egész számok:</u> Jel: **Z** [alapfogalom]

<u>Racionális számok:</u> Jel: **Q**
Racionális számnak nevezzük azt a számot, amely felírható két egész szám hányadosaként.

<u>Irracionális számok:</u> Jel: **Q***
Irracionális szám az, amely NEM írható fel két egész szám hányadosaként, ilyen például a π és a többi végtelen nem szakaszos tizedestört.

<u>Valós számok:</u> Jel: **R**

Azt a számhalmazt, amelynek az elemei a racionális és az irracionális számok, valós számhalmaznak nevezzük.

▶ *Halmazok számossága*

Két halmazról, A-ról és B-ről akkor mondjuk, hogy ugyanannyi elemük van, vagy egyenlő számosságúak, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető. Egy halmazt megszámlálhatóan végtelen halmaznak nevezünk, ha a halmaz és a természetes számok halmaza között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető.

- A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, mert fel tudjuk sorolni őket *(táblázat: a cella értéke a sor és oszlop számának hányadosa)*.
- Az irracionális számok halmaza megszámlálhatatlanul végtelen, mert azokat nem tudjuk sorba rendezni. *(Több irracionális szám van, mint racionális.)*

▶ *Tétel: A $\sqrt{2}$ irracionális szám*

A tételt indirekt módon fogjuk bizonyítani, azaz az állítás ellentettjéről bizonyítjuk be, hogy hamis. Tehát tegyük fel, hogy $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, ahol p $\in$ $\mathbf{Z}^+$ és q $\in$ $\mathbf{Z}^+$ és p és q LNKO-ja 1. Mindkét oldalt négyzetre emeljük: $\frac{p^2}{q^2}=2$ → $p^2 = 2q^2$

Látszik, hogy $2q^2$ páros, tehát p is páros, tehát $p = 2p_1$, ahol $p_1 \in \mathbf{Z}^+$

2. tétel folyt.

Az egyenletbe behelyettesítjük: $4p_1^2 = 2q^2 \rightarrow 2p_1^2 = q^2$ / :2

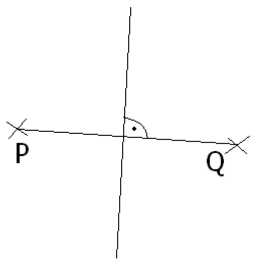
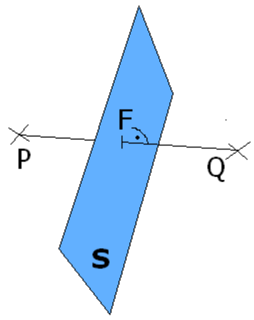
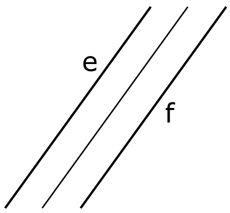
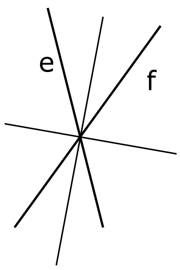
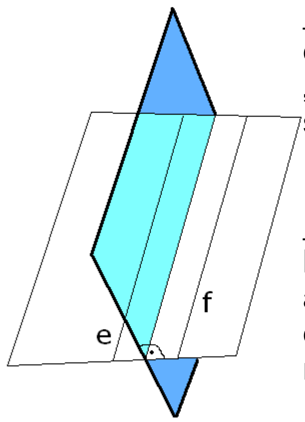
Ebből látszik, hogy q is páros, márpedig ha mind a két szám páros, akkor az LNKO-juk biztosan nagyobb egynél, pedig azt feltételeztük, hogy nem. Mivel $\sqrt{2}$ nem lehet két egész szám hányadosa ezért nem racionális szám → **IRRACIONÁLIS!**

► ***ALKALMAZÁSOK: Számhalmazok***

- egyenletek alaphalmaza
- függvények értelmezési tartománya, képhalmaza, értékkészlete
- páros számok, páratlanok, prímek, négyzetszámok, etc.
- teljes indukciós bizonyítási módszer csak a természetes számok halmazára alkalmazható
- intervallumok

3. Nevezetes ponthalmazok a síkban és a térben

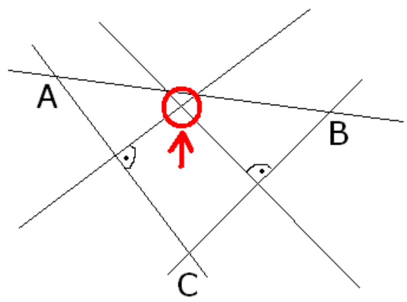
► *Két adott ponttól és két adott egyenestől egyenlő távolságra levő pontok a síkban és a térben*

	Síkban	Térben
Két ponttól	A két pontot összekötő szakasz felező merőlegese.  	A két pontot összekötő szakasz felező merőleges síkja. 
Két egyenestől	<u>Párhuzamos:</u> a két egyenes között húzott középső párhuzamos egyenes.  <u>Metsző:</u> a külső és a belső szögfelező.  	 <u>Párhuzamos:</u> a két egyenes közötti „felező párhuzamos” sík. <u>Metsző:</u> a külső és a belső szögfelezőn áthaladó, egyenesekre térben merőleges sík. <u>Kitérő:</u> Bonyolult, erről nem beszélünk

► *3 adott ponttól egyenlő távolságra levő pontok a síkban és a térben*

<u>Síkban:</u> a) egy egyenesen vannak – nincs b) két-két pontot összekötő szakaszok felező merőlegeseinek metszéspontja.

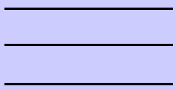
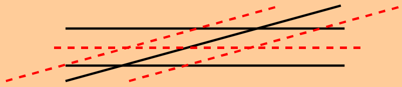
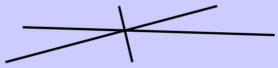
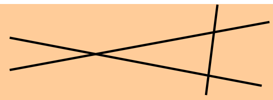
<u>Térben:</u> a) egy egyenesen – nincs b) két-két pontot összekötő szakaszok felező merőlegeseinek metszéspontján keresztül húzott, a három pont síkjára merőleges egyenes.



3. tétel folyt.

► *3 adott egyenestől egyenlő távolságra levő pontok a síkban*

Három esetet különböztetünk meg az egyenesek elhelyezkedésétől függően.

			
A három egyenes párhuzamos.	Két egyenes párhuzamos, a harmadik metszi őket.	A három egyenes egy pontban metszi egymást.	A három egyenes **nem** egy pontban metszi egymást.
Nincs ilyen pont.	A két párhuzamos egyenes közti középegyenes és utóbbi egyenesek távolságának felével a metsző egyenestől húzott párhuzamosok metszéspontjai.	Az egyetlen ilyen pont a közös metszéspont, itt a távolság ugyanis mindhárom egyenestől nulla.	Két-két egyenes szögfelezőinek metszéspontja (egy a háromszögön belül, három azon kívül).

► *Kör, körvonal, körlap, gömb, gömbfelület*

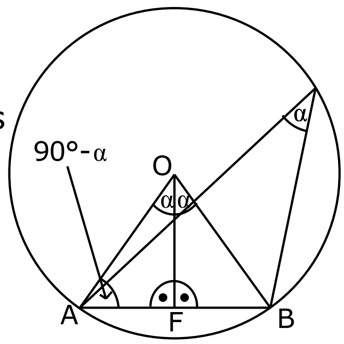
<u>Körvonal:</u> Azon pontok halmaza a síkban, amelyek a kör középpontjától adott r távolságra helyezkednek el.
<u>Körlap:</u> Azon pontok halmaza a síkban, amelyek a kör középpontjától adott r távolságon belül helyezkednek el.
<u>Gömb:</u> Azon pontok halmaza a térben, amelyek a gömb középpontjától adott r távolságon belül helyezkednek el.
<u>Gömbfelület:</u> Azon pontok halmaza a térben, amelyek a gömb középpontjától adott r távolságra helyezkednek el.

► *Ellipszis, parabola, hiperbola*

<u>Ellipszis:</u> Azon pontok halmaza a síkban, amelyeknek a sík két adott pontjától (fókuszpontok) vett távolságösszege állandó.
<u>Parabola:</u> Azon pontok halmaza a síkban, amelyeknek a sík egy *d* egyenesétől és egy *d*-re nem illeszkedő *F* pontjától vett távolságuk egyenlő.
<u>Hiperbola:</u> Azon pontok halmaza a síkban, amelyeknek a sík két adott pontjától (fókuszpontok) vett távolságkülönbsége abszolútértékben állandó.

► *A látószög, a látókörív szerkesztése*

Megadott α és AB esetén azon pontok mértani helyét kapjuk meg, melyekről α szögben látszik AB. A szerkesztés menete: felvesszük AB-t, megfelezzük, megszerkesztjük a 90°-α szöget, odamásoljuk A-ba, ahol metszik a felezőt, ott lesz a kör közepe, a sugár $\overline{OA}$. A látókörív speciális esete Thalész tétele, ahol α pont 90°, az AB szakasz a kör átmérője, felezőpontja tehát a kör középpontja (F=O).

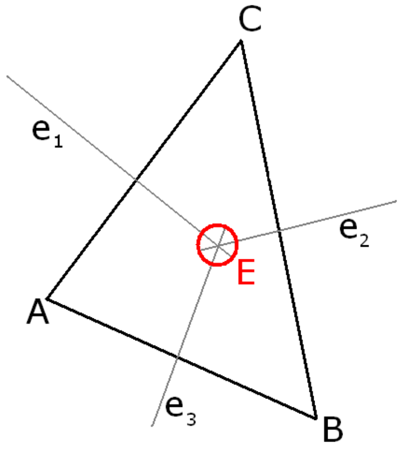


3. tétel folyt.

► ***Tétel: A háromszög oldalainak felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást***

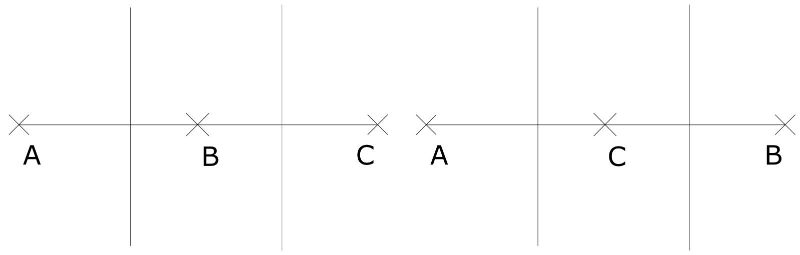
$e_1 \cap e_2 = E$ - létezik-e E?

$\overline{AE} = \overline{EB} \rightarrow \overline{AE} = \overline{EC} \rightarrow E \in e_3$



Elfajuló esetek:

$e_1 \parallel e_2$



Ekkor persze háromszög sem létezik... tehát ha nem $e_1 \parallel e_2$, akkor metszik egymást $\rightarrow$ Ha létezik a háromszög, akkor E is létezik.

► ***Alkalmazások: Nevezetes ponthalmazok***

- geometriai feladatokban, szerkesztésekben
- Kepler I.: égitestek pályái kúpszeletek
- optikai eszközök (tükrök, lencsék) alakjai kúpszeletek
- parabolaantenna

4. Hatványozás, hatványfüggvények és tulajdonságaik

Definíció pozitív egész, nulla és negatív egész kitevőre

- x ∈ **N⁺** $a^x = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ } x tényezős szorzat
- x = 0 $a^x = a^0 = 1$ (a≠0)
- x ∈ **Z⁻** $a^x = \frac{1}{a^{-x}} = (a^{-x})^{-1}$

A hatványozás azonosságai

a, b ∈ **R**; a≠0; b≠0; x, y ∈ **Z**

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \qquad a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Hatványfüggvények tulajdonságai

f(x)=xⁿ n ∈ **Z⁺**

- értelmezési tartomány: **R** – valós számok
- zérushely: x=0
- szimmetria: ha *n* páros, a függvény képe is páros és vice versa
- periodicitás: nem periodikus
- folytonosság: folytonos
- végtelenbeli határérték: +∞-ben +∞-hez, −∞-ben páros *n* esetén +∞-hez, páratlan *n* esetén −∞-hez tart
- monotonitás: [0;+∞[tartományban szigorúan monoton nő,]−∞;0[tartományban páros *n* esetén szigorúan monoton csökken, páratlan *n* esetén szigorúan monoton nő
- szélsőérték, korlátosság: páros *n* esetén minimuma 0, ezt x=0-nál éri el
- konvexség: páros *n* esetén végig konvex, páratlan *n* esetén [0;+∞[tartományban konvex,]−∞;0[tartományban konkáv, x=0 inflexiós pont
- értékkészlet: páros *n* esetén **R⁺** ∪ {0}, páratlan *n* esetén **R**
- képe: parabola, melynek páratlan *n* esetén a bal fele tengelyesen tükrözve van az x tengelyre

f(x)=xⁿ n ∈ **Z⁻**

- értelmezési tartomány: **R** \ {0}
- zérushely: nincs
- szimmetria: páratlan *n* esetén páratlan
- periodicitás: nem periodikus
- folytonosság: szakadási pont x=0-nál
- végtelenbeli határérték: +∞-ben és −∞-ben is 0-hoz tart

4. tétel folyt.

- monotonitás: $[0;+\infty[$ tartományban szigorúan monoton csökken, $]-\infty;0[$ tartományban páros *n* esetén szigorúan monoton nő, páratlan *n* esetén szigorúan monoton csökken
- szélsőérték, korlátosság: páratlan *n* esetén korlát ($[0;+\infty[$ tartományban alsó, $]-\infty;0[$ tartományban felső) a 0; páros *n* esetén az alsó korlátja 0
- konvexség: páratlan *n* esetén $[0;+\infty[$ tartományban konvex, $]-\infty;0[$ tartományban konkáv, páros *n* esetén végig konvex
- értékkészlet: páratlan *n* esetén $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, páros *n* esetén $\mathbf{R}^+$
- képe: hiperbola

▶ *Alkalmazások: Hatványozás, parabola*

- A számok normálalakja lehetőséget ad nagyon nagy és nagyon kicsi abszolútértékű számok kényelmes kezelésére. Egy pozitív szám normálalakja az a kéttényezős szorzat, amely eső tényezője egy 1-nél nem kisebb, de 10-nél kisebb szám, másik tényezője 10-nek egész kitevőjű hatványa.
- Az összetett számok prímtényezős alakjában is a prímek hatványai szerepelnek.
- A parabola keresztmetszetű tükör fókuszába gyűjti a szimmetriatengelyével párhuzamosan érkező hősugarakat, így egy ponton érzékelhetően melegebb lesz.

▶ *Tétel: Az $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ azonosság bizonyítása*

Definíció szerint egy olyan szorzatot kapunk, mely *x* darab a/b tényezőből áll. Törteket úgy szorzunk, hogy a számlálóknak és a nevezőknek vesszük a szorzatát. Így a közös számlálóban *x* darab *a*, a közös nevezőben *x* darab *b* tényezőből álló szorzat található. Definíció szerint pedig az *x* tagú *a* tényezőkből álló szorzat értéke a^x, az *x* tagú *b* tényezőkből állóé pedig b^x.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \overbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}}^{x\text{ tényező}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}^{x\text{ darab }a}}{\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b}_{x\text{ darab }b}} = \frac{a^x}{b^x}$$

5. Gyökvonás, gyökfüggvények és tulajdonságaik

▸ *Definíció pozitív egész kitevőre*

- Egy nemnegatív *a* szám 2k-adik gyökén ($k \in \mathbf{N}^+$) azt a nemnegatív számot értjük, melynek 2k-adik hatványa *a*. $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k}=a$ ha $a \geqslant 0$
- Egy *a* valós szám 2k+1-edik gyökén ($k \in \mathbf{N}^+$) azt a valós számot értjük, melynek 2k+1-edik hatványa *a*. $\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=a$

▸ *A gyökvonás azonosságai*

a, b > 0; x, y, z ∈ **N**; x, y, z > 1

$$\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{a\cdot b} \qquad \sqrt[x]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}} \qquad \sqrt[x]{a^y}=\left(\sqrt[x]{a}\right)^y \qquad \sqrt[y]{\sqrt[x]{a}}=\sqrt[x\cdot y]{a} \qquad \sqrt[x]{a^y}=\sqrt[x\cdot z]{a^{y\cdot z}}$$

▸ *Törthatvány értelmezése*

Az *a* pozitív szám $\frac{m}{n}$ -edik hatványa az *a* alap *m*-edik hatványának *n*-edik gyöke, azaz $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ ahol $a > 0$; $m \in \mathbf{Z}$; $n \in \mathbf{N}$ és $n > 1$

▸ *Gyökfüggvények tulajdonságai*

$\mathbf{f(x)=\sqrt[n]{x}}$ $n \in \mathbf{Z}^+$

- értelmezési tartomány: páros *n* esetén $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, páratlan *n* esetén **R**
- zérushely: x=0
- szimmetria: ha *n* páratlan, a függvény páratlan
- periodicitás: nem periodikus
- folytonosság: folytonos
- végtelenbeli határérték: +∞-ben +∞-hez, −∞-ben páratlan *n* esetén −∞-hez tart
- monotonitás: szigorúan monoton nő
- szélsőérték, korlátosság: páros *n* esetén minimuma 0, ezt x=0-nál éri el
- konvexség: [0;+∞[tartományban konkáv, páratlan *n* esetén]−∞;0[tartományban konvex, x=0 inflexiós pont
- értékkészlet: páros *n* esetén $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, páratlan *n* esetén **R**
- képe: fél parabola (1. síknegyedben), páratlan *n* esetén az origóra középpontosan tükrözve is (3. síknegyedben)

5. tétel folyt.

▶ ALKALMAZÁSOK: Gyökvonás

- másodfokú egyenlet megoldóképlete
- másodfokú egyenletekben, ahol $ax^2+bx+c=0$, ott $D=b^2-4ac$. A diszkrimináns értékéből következtethetünk a gyökök számára is:
  - D=0 – egy gyök
  - D>0 – két gyök
  - D<0 – nincs gyök
- kapilláris emelkedés sík falnál
- hang terjedési sebességének hőmérsékletfüggése gázokban
- szórás számítása statisztikában
- két pont távolságának kiszámítása Pitagorasz tételével: $s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$
- mértani középben – magasság- és befogótétel
- inga lengésideje: $T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$

▶ TÉTEL: Szorzat négyzetgyöke a tényezők négyzetgyökének szorzata

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

A baloldal négyzetgyök, tehát definíció szerint nemnegatív. A jobboldal két nemnegatív szám szorzata, amely szintén nemnegatív. Így nyugodt szívvel négyzetre emelhetjük mindkét oldalt.

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2=\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2$$

A baloldal definíció szerint *ab*, a jobboldalon pedig egy szorzat van négyzetre emelve. Felhasználjuk az $a^x\cdot b^x=(a\cdot b)^x$ azonosságot, miszerint szorzat hatványa megegyezik a tényezők azonos hatványra emelt értékeinek szorzatával.

$$ab=\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2$$

Definíció szerint így a jobboldalon is ab található.

$$ab=ab$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezzel bebizonyítottuk az azonosságot.

6. A logaritmus. Az exponenciális és a logaritmusfüggvény, a függvények tulajdonságai

A logaritmus definíciója

A *b* szám *a* alapú logaritmusa az a kitevő, amelyre *a*-t emelve *b*-t kapunk, ahol $a > 0$; $a \neq 1$ és $b > 0$. Jele: $\log_a b$.
A 10-es alapú logaritmus jele **lg**, az *e* alapúé **ln**.

A logaritmus azonosságai

$x, y, a > 0;\ a \neq 1;\ k \in \mathbf{R}$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \log_a x^k = k \cdot \log_a x \qquad \log_x y = \frac{\log_a y}{\log_a x}$$

Az exponenciális függvények tulajdonságai

$f(x)=n^x \quad n>1$

- értelmezési tartomány: **R** – valós számok
- zérushely: nincs
- szimmetria: se nem páros, se nem páratlan
- periodicitás: nem periodikus
- folytonosság: folytonos
- végtelenbeli határérték: $+\infty$-ben $+\infty$-hez, $-\infty$-ben 0-hoz tart
- monotonitás: szigorúan monoton nő
- szélsőérték, korlátosság: alsó korlátja a 0, felső korlátja nincs
- konvexség: konvex
- értékkészlet: $\mathbf{R}^+$

$f(x)=n^x \quad 0<n<1$

- értelmezési tartomány: **R** – valós számok
- zérushely: nincs
- szimmetria: se nem páros, se nem páratlan
- periodicitás: nem periodikus
- folytonosság: folytonos
- végtelenbeli határérték: $+\infty$-ben 0-hoz, $-\infty$-ben $+\infty$-hez tart
- monotonitás: szigorúan monoton csökken
- szélsőérték, korlátosság: alsó korlátja a 0, felső korlátja nincs
- konvexség: konvex
- értékkészlet: $\mathbf{R}^+$

▶ *A logaritmusfüggvények tulajdonságai*

$f(x)=\log_n x \quad n>1$

- értelmezési tartomány: $\mathbf{R}^+$
- zérushely: x=1
- szimmetria: se nem páros, se nem páratlan
- periodicitás: nem periodikus
- folytonosság: folytonos
- végtelenbeli határérték: +∞-ben +∞-hez tart
- monotonitás: szigorúan monoton nő
- szélsőérték, korlátosság: nem korlátos
- konvexség: konkáv
- értékkészlet: **R**

$f(x)=\log_n x \quad 0<n<1$

- értelmezési tartomány: $\mathbf{R}^+$
- zérushely: x=1
- szimmetria: se nem páros, se nem páratlan
- periodicitás: nem periodikus
- folytonosság: folytonos
- végtelenbeli határérték: +∞-ben −∞-hez tart
- monotonitás: szigorúan monoton csökken
- szélsőérték, korlátosság: nem korlátos
- konvexség: konvex
- értékkészlet: **R**

▶ *Alkalmazások: Logaritmus és exponenciális*

- hasadóanyagok bomlásának kiszámításához a felezési idő alapján e alapú exponenciális egyenlet vezet
- egy adott hőmérsékletű tárgy adott hőmérsékletű közegbe helyezve szintén e alapú hatvány hosszú idő múlva veszi át környezete hőmérsékletét
- az ember érzékszerveinek többsége logarimikus (pl. hallás – dB skála)
- kémiában a pH érték a H_3O^+ ion koncentrációjának tízes alapú logaritmusa
- légnyomás csökkenése a magassággal – e alapú hatvánnyal

▶ *Tétel: Logaritmus átírása* (tankönyvi bizonyítás)

Tétel: $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ ahol a, b, c > 0; a ≠ 1; c ≠ 1

A logaritmus definíciója alapján $a^{\log_a b}=b$.

Írjuk fel *a*-t *c* hatványaként $a=c^{\log_c a}$ és helyettesítsük be az előzőbe:

$\left(c^{\log_c a}\right)^{\log_a b}=b$ hatvány hatványa miatt $c^{\log_c a\cdot\log_a b}=b$ + definíció szerint $c^{\log_c b}=b$ tehát

$$c^{\log_c a\cdot\log_a b}=c^{\log_c b}$$

az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $\log_c a\cdot\log_a b=\log_c b$ és mivel

$\log_c a\neq 0$ ezért oszthatjuk vele az egyenlet két oldalát: $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ ✓

7. Első- és másodfokú függvények, egyenletek

▶ *Elsőfokú függvények tulajdonságai*

Az elsőfokú függvényekben a változót megszorozzuk egy adott számmal, majd a szorzathoz hozzáadunk egy adott számot. Az adott szám konstans, azaz nem változik. Képük egyenes, az x tengelyt $\left(\frac{-b}{a};0\right)$ -nál metszik. Pl.: f(x)=5x+6

$f(x)=ax+b \quad a, b \in \mathbf{R}$

- értelmezési tartomány: **R**
- zérushely: $x=\frac{-b}{a}$
- szimmetria: b=0 esetén páratlan
- periodicitás: nem periodikus
- folytonosság: folytonos
- végtelenbeli határérték: +∞-ben +∞-hez, −∞-ben −∞-hez tart, a<0 esetén fordítva
- monotonitás: a<0 esetén szigorúan monoton csökken, 0>0 esetén szigorúan monoton nő
- szélsőérték, korlátosság: nem korlátos
- értékkészlet: **R**

▶ *Másodfokú függvények tulajdonságai*

Általánosan, az $ax^2+bx+c=0$ egyenletet, ahol a, b, c valós paraméterek, és a ≠ 0, 0-ra redukált másodfokú egyenletnek nevezzük.

$f(x)=ax^2+bx+c \quad a, b, c \in \mathbf{R} \quad a > 0$

- értelmezési tartomány: **R**
- zérushely: diszkrimináns előjelétől függően – D<0 esetén nincs, D=0 esetén egy, D>0 esetén pedig két helyen metszi az x tengelyt
- szimmetria: b=0 esetén páros
- periodicitás: nem periodikus
- folytonosság: folytonos
- végtelenbeli határérték: +∞-ben +∞-hez, −∞-ben −∞-hez tart
- monotonitás: minimumáig *(lásd a következő pontban)* szigorúan monoton csökken, utána szigorúan monoton nő
- szélsőérték, korlátosság: minimuma van az $x=\frac{-b}{2a}$ helyen $\left(\frac{-b^2-4ac}{4a}\right)$
- konvexség: konvex
- értékkészlet: $\left[\frac{-b^2-4ac}{4a};+\infty\right]$

7. tétel folyt.

$f(x)=ax^2+bx+c$ a, b, c ∈ R   a < 0

- értelmezési tartomány: **R**
- zérushely: diszkrimináns előjelétől függően – D<0 esetén nincs, D=0 esetén egy, D>0 esetén pedig két helyen metszi az x tengelyt
- szimmetria: b=0 esetén páros
- periodicitás: nem periodikus
- folytonosság: folytonos
- végtelenbeli határérték: +∞-ben −∞-hez, −∞-ben −∞-hez tart
- monotonitás: maximumáig *(lásd a következő pontban)* szigorúan monoton nő, utána szigorúan monoton csökken
- szélsőérték, korlátosság: maximuma van az $x=\frac{-b}{2a}$ helyen $\left(\frac{-b^2-4ac}{4a}\right)$
- konvexség: konkáv
- értékkészlet: $\left[-\infty;-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$

▶ *A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja*

$a(x-x_1)(x-x_2)=0$

▶ *Gyökök és együtthatók közti összefüggés*

I. $\frac{-b}{a}=x_1+x_2$ II. Viéte-formula: $\frac{c}{a}=x_1\cdot x_2$

▶ *Alkalmazások: Első- és másodfokú függvények*

Fizikában, matematikában számos probléma megoldására jól alkalmazhatóak.

- az egyenletesen változó mozgás négyzetes úttörvénye
- nevezetes egyenlőtlenség: két nemnegatív szám számtani közepe sosem kisebb mértani közepüknél
- nevezetes egyenlőtlenség: nemnegatív szám és reciprokának összege nagyobb vagy egyenlő, mint kettő
- bizonyos szélsőérték feladatoknál használható
- Pitagorasz tételének alkalmazásakor

▶ *Tétel: A megoldóképlet levezetése*

$ax^2+bx+c=0$ / :a – azért oszthatunk, mert a≠0, ha másodfokú a függvény.

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ / Törteket bővítjük 2-vel.

$x^2+\frac{2b}{2a}x+\frac{2c}{2a}=0$ / 2-t kiemeljük a törtből.

$x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{2c}{2a}=0$ / Alkalmazzuk az $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ azonosságot.

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{2c}{2a}=0$ / Négyzetre emeljük a $\frac{b}{2a}$ törtet + közös nevező.

7. tétel folyt.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}=0$$ / Összevonjuk a törteket.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$ / Négyzetes kifejezéssé alakítjuk a törtet.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0$$ / Alkalmazzuk a $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ azonosságot

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$ / Összevonjuk a törteket.

$$\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$ / A szorzat=0, ha valamelyik tag=0

$$x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \quad \vee \quad x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$$

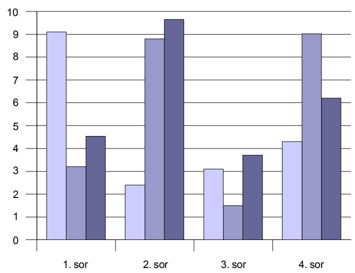
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

8. Adatsokaságok jellemzői, a valószínűségszámítás elemei

▶ *Adatsokaságot jellemző értékek*

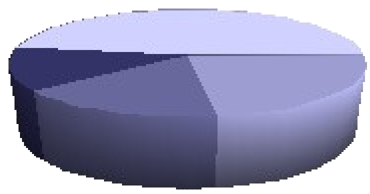
- **módusz:** az adatsokaságban a leggyakoribb adat(ok)
- **számtani közép/átlag:** az adatok összegének és az adatok számának hányadosa
- **medián:** az adatokat nagyság szerinti sorba rendezve a középső adat
- **mintaterjedelem:** az előforduló legkisebb és legnagyobb adat különbsége
- **szórásnégyzet:** az átlagtól való eltérések négyzetének átlaga
- **szórás:** a szórásnégyzetből vont négyzetgyök

▶ *Adatsokaságok ábrázolása*



GÖRBE/VONAL/OSZLOPDIAGRAM

Akkor hasznos, ha adatok változását vagy egymáshoz való viszonyát szeretnénk ábrázolni



KÖR/TORTADIAGRAM

Akkor hasznos, ha az adatoknak az egészhez viszonyított arányát vizsgáljuk.

▶ *Axiómák, a klasszikus valószínűségi modell*

<u>A valószínűség axiómái:</u>

- Ha A tetszőleges esemény, akkor $P(A) \geq 0$.
- $P(H)=1$, ahol *H* a biztos esemény.
- Ha *A* és *B* egymást kizáró események (vagyis $A \cdot B = \emptyset$), akkor $P(A+B)=P(A)+P(B)$

Azoknál a valószínűségi kísérleteknél, amelyeknél véges sok elemi esemény következhet be, és ezek egyformán valószínűek, *klasszikus valószínűségi modellről* beszélünk. Ebben a modellben az események valószínűségét a következőképpen kapjuk:

$$valószínűség = \frac{kedvező\ esetek\ száma}{összes\ eset\ száma}$$

EZ A TÉTEL MÉG SZERKESZTÉS ALATT ÁLL

9. Első- és másodfokú egyenlőtlenségek. Pozitív számok nevezetes közepei, ezek felhasználása szélsőérték-feladatok megoldásában

► *Elsőfokú egyenlőtlenségek*

Az elsőfokú egyenlőtlenség általános formái (a≠0):

ax+b>0 ax+b≥0 ax+b≤0 ax+b<0

Elsőfokú egyenlőtlenségeket kétféle módszerrel oldhatunk meg.

<u>Algebrai módszer:</u>
b-t átvisszük az egyenlőtlenség jobboldalára, majd osztunk a-val. Mivel az osztás művelete megfordíthatja az egyenlőtlenség irányát, így a<0 esetén a relációs jel megfordul. Pl.: 5x+4>0 → x>-0.8   -3x-6≤0 → x≥-2

<u>Grafikus módszer:</u>
Derékszögű koordinátarendszerben ábrázoljuk az f(x)=ax+b függvényt, majd megnézzük, hogy f(x)>0 esetén mely tartományban van a függvény képe az x-tengely felett, f(x)<0 esetén pedig az x-tengely alatt. Amennyiben az egyenlőséget is engedélyezi az egyenlőtlenség, a zérushely szintén része a megoldáshalmaznak.

► *Másodfokú egyenlőtlenségek*

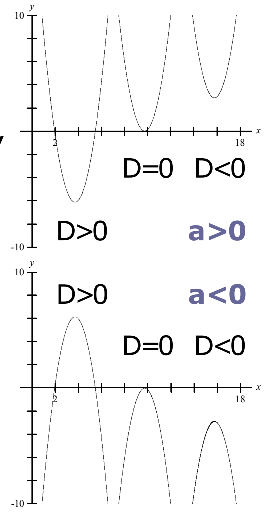
Az másodfokú egyenlőtlenség általános formái (a≠0):

$ax^2+bx+c>0$ $ax^2+bx+c\geq 0$ $ax^2+bx+c\leq 0$ $ax^2+bx+c<0$

Másodfokú egyenlőtlenségeket szintén kétféle módszerrel oldhatunk meg.

<u>Algebrai módszer:</u>
Az egyenlőtlenséget teljes négyzetté (pl. $x^2-2x+1\geqslant 0 \rightarrow (x-1)^2\geqslant 0$) vagy szorzattá (pl. $2x^2+x-1<0 \rightarrow 2\cdot(x-\frac{1}{2})\cdot(x+1)<0$) alakítjuk és több esetre bontva vizsgáljuk az előjeleket.

<u>Grafikus módszer:</u>
A nullára rendezett egyenletnek a megoldóképlettel (► ***7. tétel***) megkeressük a gyökeit, ez(ek) lesz(nek) a függvény ($f(x)=ax^2+bx+c$) zérushelye(i). Ezután megvizsgáljuk a függvény képét derékszögű koordinátarendszerben, mely hatféle lehet (lásd jobbra). Végül megnézzük, hogy f(x)>0 esetén mely tartományban van a függvény képe az x- tengely felett, f(x)<0 esetén pedig az x-tengely alatt. Amennyiben az egyenlőséget is engedélyezi az egyenlőtlenség, a zérushelyek szintén részei a megoldáshalmaznak.



9. tétel folyt.

▶ *Pozitív számok nevezetes közepei*

a, b ∈ **R⁺**

- számtani közép: $A(a;b)=\frac{a+b}{2}$
- mértani közép: $G(a;b)=\sqrt{a \cdot b}$
- négyzetes közép: $N(a;b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$
- harmonikus közép: $H(a;b)=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

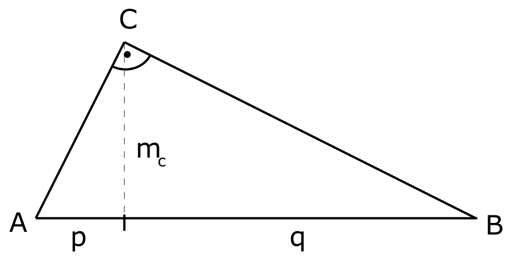
A fenti közepek között összefüggés áll fenn: H(a; b) ≤ G(a; b) ≤ A(a; b) ≤ N(a; b)

▶ *Nevezetes közepek felhasználása szélsőérték-feladatok megoldásában*

Ha két szám mértani közepe állandó, akkor alkalmazhatjuk a mértani közép maximumának meghatározására a nevezetes egyenlőtlenséget (G(a; b) ≤ A(a; b)). Ha mindkét közép változik, ez a módszer nem eredményes

▶ *Alkalmazások: Nevezetes közepek*

- számtani közép: statisztikai átlagszámítás; két szám közötti egész számok összegének kiszámítása
- mértani közép: magasságtétel ($m_c^2=p \cdot q$) és befogótételek ($p \cdot c=b^2$ $q \cdot c=a^2$) derékszögű háromszögben



- négyzetes közép: statisztikában szórásszámításkor (▶ ***8. tétel***)
- harmonikus közép: fizika – párhuzamos áramkörök eredő ellenállása, ekkor szorozni kell az ellenállások számával

▶ *Tétel: A számtani és a mértani közép közötti összefüggés bizonyítása*

A(x;y) ≥ G(x;y)   ahol x, y > 0

$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$ Mivel mindkét oldal ≥0, ezért négyzetre emeljük őket.

$\frac{x^2+y^2+2xy}{2^2} \geqslant xy$ Mindkét oldalt megszorozzuk 4-gyel (2^2).

$x^2+y^2+2xy \geqslant 4xy$ Mindkét oldalból kivonunk 4xy-t.

$x^2-2xy+y^2 \geqslant 0$ Észrevesszük az azonosságot :)

$(x-y)^2 \geqslant 0$ Ez pedig minden nullánál nagyobb x-re és y-ra igaz. ✓

[Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért mindez visszafelé is igaz.]

10. Számsorozatok

▶ *Számsorozatok*

Számsorozatot kapunk, ha pozitív egész számok mindegyikéhez egyértelműen hozzárendelünk egy valós számot. Tehát a számsorozat olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, az értékkészlete pedig a valós számok vagy annak egy részhalmaza. A sorozat elemeit a-val jelöljük. Az elem sorszámát alsó indexbe tesszük: a_1, a_2, a_3, ... a_n ... ahol a_1 az első elem, a_n az n-edik elem.

▶ *Számtani sorozat*

A számtani sorozat olyan számsorozat, amelyben bármely két – ugyanolyan sorrendben vett – szomszédos elemének különbsége állandó. A különbséget differenciának nevezzük, és d-vel jelöljük.

$a_{n+1}-a_n=d$, ahol $n \in \mathbf{N}^+$ és $d \in \mathbf{R}$

Ha d > 0, akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő,
ha d < 0, akkor a sorozat elemei szigorúan monoton csökkenőek,
ha d = 0, akkor a sorozat konstans (minden eleme azonos).
Ezért a számtani sorozatot aritmetikai sorozatnak is nevezzük

A számtani sorozat n-edik elemét a következő képlettel is kiszámíthatjuk: adjuk hozzá az első elemhez a differencia n 1-szeresét.

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$$

A számtani sorozat első n tagjának az összege:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

A számtani sorozatban bármely három szomszédos eleme közül a középső a két szélsőnek a számtani közepe. Ez az összefüggés általánosan is igaz: bármely elem a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő elemeknek a számtani közepe.

$$a_n=\frac{a_{n-i}+a_{n+i}}{2} \quad \text{ahol } n \in \mathbf{N}^+ \text{ és } i < n$$

▶ *Mértani sorozat*

A mértani sorozat olyan számsorozat, amelyben bármely két – ugyanolyan sorrendben vett – szomszédos elemének hányadosa állandó. A hányadost, más néven quotienst q-val jelöljük.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q \quad \text{ahol } n \in \mathbf{N}^+ \text{ és } d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

Ezen kívül az elemek között sem szerepelhet a nulla.
A sorozat bármelyik elemét megkapjuk, ha az előző elemet szorozzuk a

hányadossal. Ha a hányados pozitív, akkor a sorozat minden eleme azonos előjelű, ha negatív, akkor az elemek váltakozó előjelűek. Ha q > 1, akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő, ha 0 < q < 1, akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenő, ha q = 1, vagy $a_1=0$ akkor a sorozat konstans.

A mértani sorozat n-edik elemét a következő képlettel is kiszámolhatjuk:

$$a_n=a_1 \cdot q^{n-1}$$

A mértani sorozat első n tagjának összege:

$$S_n=a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \text{ ha } q \neq 1 \text{ és } S_n=n \cdot a_1 \text{ ha } q=1$$

A mértani sorozat bármely három szomszédos eleme közül a középső négyzete a két szélsőnek a szorzatával egyenlő. Ez az összefüggés általánosan is igaz: bármely elem négyzete a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő elemeknek a szorzata.

$$a_n=\sqrt{a_{n-i} \cdot a_{n+i}} \text{ ahol } n \in \mathbf{N}^+ \text{ és } i < n$$

Nemnegatív számok körében ez a mértani közép kapcsolatot jelenti, ezért a mértani sorozatot geometriai sorozatnak is nevezik.

► *Fibonacci-féle sorozat*

A Fibonacci-féle sorozat több helyen is előfordul a természetben, erről bővebben az alkalmazások résznél. Tetszőleges tagját az alábbi képlet adja meg:

$$F(n)=\begin{cases} 0, & \text{ha } n=0; \\ 1, & \text{ha } n=1; \\ F_{n-1}+F_{n-2} & \text{ha } n>1. \end{cases}$$

A sorozat lineárisan rekurzív, szomszédos tagjainak aránya φ-hez, az aranymetszés értékéhez tart.

► *Sorozatok jellemzői*

Korlátosság:
Ha van olyan K valós szám, amelynél nagyobb eleme nincs a sorozatnak, azaz minden n-re: $a_n \leq K$, akkor a sorozat felülről korlátos. Ha van olyan k valós szám, amelynél kisebb eleme nincs a sorozatnak, azaz minden n-re: $k \leq a_n$, akkor a sorozat alulról korlátos. Korlátosnak nevezzük az olyan sorozatokat, amelyek alulról is és felülről is korlátosak.

Monotonitás:
A sorozat szigorúan monoton növekvő, ha bármely két elem közül a nagyobb sorszámú (indexű) a nagyobb: $a_{n+1} > a_n$. (Ha $a_{n+1} \geq a_n$, akkor monoton növekvő). Egy sorozat szigorúan monoton csökkenő, ha bármely két eleme közül a nagyobb sorszámú (indexű) a kisebb: $a_{n+1} < a_n$. (Ha $a_{n+1} \leq a_n$, akkor monoton csökkenő).

Konvergencia:
Az olyan számsorozatot, amelynek van véges határértéke, konvergens sorozatnak nevezzük. Az a_n sorozat határértéke az A valós szám, ha bármely az A-t tartalmazó intervallumon kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van, azaz bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan N természetes szám, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$. Az N küszöbszám. Jelölése: $a_n \to A$ vagy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

10. tétel folyt.

Határértéktételek:
Ha az a_n sorozat (szigorúan) monoton növekvő és felülről korlátos akkor van határértéke, tehát konvergens. Ha az a_n sorozat (szigorúan) monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor van határértéke, tehát konvergens. Minden konvergens sorozat korlátos. A korlátosság szükséges feltétele a konvergenciának (a határérték létezésének), de nem elégséges. Például az $a_n = (-1)^n$ korlátos sorozat, de nem konvergens, nincs határértéke. Minden konvergens sorozatnak csak egy határértéke van. Az olyan sorozatot, amelynek nincs határértéke, divergens sorozatnak nevezzük.

► *Tétel: A mértani sorozat első n tagjának összege* $a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

A mértani sorozat első n tagjának összegét kiírjuk:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Az egyenlőség mindkét oldalát megszorozva q-val érdekes eredményre jutunk.

$$q \cdot s_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_n \cdot q$$

A definíció alapján a sorozat tetszőleges eleme megszorozva q-val a következő elemet adja, így behelyettesítjük az összeg tagjait ezzel a módszerrel.

$$q \cdot s_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n+1}$$

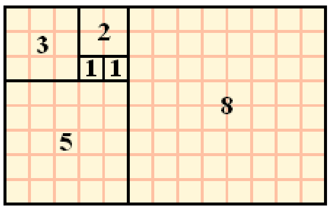
Mivel a jobboldali tagok többsége feltűnik az első felírt egyenlőségben is, ezért kivonjuk egymásból őket (ha két-két oldaluk megegyezik, akkor különbségük is).

$$(q-1) \cdot s_n = a_{n+1} - a_1 = a_1 \cdot (q^n - 1)$$

Mindkét oldalt elosztva kapunk egy a_1-et q-t és n-t tartalmazó képletet s_n-re.

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

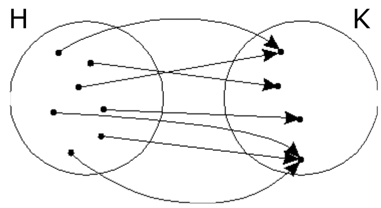
► *Alkalmazások: Számsorozatok*



- Fibonacci-féle sorozat elemei több helyen is megjelennek az életben:
  - A Pascal-háromszögben bizonyos átlók mentén összegezve a számokat Fibonacci-számokat kapunk.
  - Egy $2 \cdot n -$es sakktáblát $2 \cdot 1 -$es dominókkal F_{n+1}-féle képpen lehet lefedni.
  - A virágszirmok száma gyakran Fibonacci-szám.
  - A fenti ábrán látható módon egymás mellé helyezett négyzetek oldalhosszai a Fibonacci-féle sorozat elemei.
- A mértani sorozatok kölcsönök esetében törlesztőrészletek kiszámítására használhatóak (q=kamat, a_1=felvett összeg, n=eltelt idő).
- Számtani sorozatot alkotnak *egyes* operációs rendszerek hálózaton használt csomagazonosítói (amely egyébként igen nagy hiba).

11. Függvények vizsgálata elemi úton és a differenciálszámítás felhasználásával

▶ *Függvény, értelmezési tartomány, értékkészlet fogalma*



Adott két halmaz, *H* és *K*. Ha a *H* halmaz minden egyes eleméhez valamilyen módon (de egyértelműen) hozzárendeljük a *K* halmaznak egy-egy elemét, akkor a hozzárendelést függvénynek nevezzük. Azon értékeknek a halmaza, amelyek a változó lehetséges értékei lehetnek az értelmezési tartomány, a lehetséges eredmények halmaza az értékkészlet.

▶ *Függvény megadási módjai*

Függvények megadásánál először az értelmezési tartományt (fent *H*), majd a képhalmazt (*K*) kell megadni, jelölés: H → K. Ha nem adjuk meg, akkor **R** → **R**. Utána megadjuk a hozzárendelési szabályt. Lehet például

- képlettel (formulával) pl.: f(x)=6x
- utasítással pl.: f(x)=5^x utolsó számjegye
- táblázattal
- grafikonnal, vagy valamilyen ábrával.

▶ *Függvények vizsgálata elemi úton*

- Értelmezési tartomány: megvizsgáljuk, mely értékek esetén van értelme a benne szereplő kifejezés(ek)nek (törtek, logaritmusok, páros gyökök).
- Tengelymetszetek: az **x** tengelyt azo(ko)n a pont(ok)on *(zérushely)* metszi a függvény, ahol a függvény helyettesítési értéke 0; az **y** tengelyt pedig abban a magasságban, amelyet a függvény ad 0 változó esetén.
- Szimmetria: egy függvény páros, ha képe tengelyesen szimmetrikus az **y** tengelyre, azaz minden x értékre igaz, hogy f(x)=f(-x). Egy függvény páratlan, ha képe középpontosan szimmetrikus az origóra, azaz minden x értékre igaz, hogy f(x)=-f(-x). Példa: x^2, x^3.
- Periodicitás: egy függvény akkor periodikus, ha képe eltolási szimmetriával rendelkezik, azaz van olyan *n* ($n \in R \setminus \{0\}$) szám, amely esetén minden x értékre igaz, hogy f(x)=f(x+n). Példa: sin(x), cos(x).
- Folytonosság: egy függvény akkor folytonos, ha nincs szakadási helye, azaz minden pontjában van határértéke a függvénynek.
- Végtelenbeli határérték: az f(x) függvénynek a +∞-ben a határértéke +∞, ha bármely K számhoz létezik olyan N szám, hogy ha $x \in D_f$ és x>N, akkor f(x)>K. Jelölés: $\lim_{n\to\infty} f(x)=+\infty$
- Korlátosság meghatározása: a függvény akkor rendelkezik korláttal, ha van olyan szám, amelynél minden helyettesítési érték kisebb/nagyobb. Ha alsó és felső korlátja is van, akkor a korlátos.
- Értékkészlet meghatározása, függvény ábrázolása.

▶ *Függvények további vizsgálata differenciálszámítás felhasználásával*

- Monotonitás:

f(x) első deriváltja	f(x) monotonitása
f'(x)>0	f(x) szigorúan monoton nő nagyobb értékhez nagyobb helyettesítési érték tartozik
f'(x)≥0	f(x) monoton nő nagyobb értékhez nem kisebb helyettesítési érték tartozik
f'(x)=0	f(x) konstans (nem változik) minden értékhez azonos helyettesítési érték tartozik
f'(x)≤0	f(x) monoton csökken nagyobb értékhez nem nagyobb helyettesítési érték tartozik
f'(x)<0	f(x) szigorúan monoton csökken nagyobb értékhez kisebb helyettesítési érték tartozik

- Szélsőértékek: egy pont bizonyos sugarában a legnagyobb helyettesítési érték a függvény (helyi) maximuma, legkisebbje a függvény (helyi) minimuma.
  Meghatározása: ha az első derivált 0 és a második nem 0, akkor negatív érték esetén (helyi) maximuma, pozitív érték esetén pedig (helyi) minimuma van a függvénynek. Ha az első el nem tűnő deriváltnál *n* páros, akkor a fentiek szerinti szélsőértéke, ha *n* páratlan, akkor inflexiós pontja van az adott x értéknél.
- Függvény alakja: pozitív második derivált esetén a függvény konvex, negatív esetén konkáv.

▶ *ALKALMAZÁSOK: Függvényvizsgálat*

- Fizikában: út-idő első deriváltja a sebesség-idő, második deriváltja a gyorsulás-idő.
- Másodfokú egyenlőtlenséget függvényvizsgálattal is meg lehet oldani.
- Bizonyos szélsőérték feladatoknál hasznos lehet a deriválás.
- Bármilyen görbe érintő egyenesének meredeksége a függvény adott pontbeli első deriváltja.
- Lineáris programozásnál (lásd szendvicskenegetés) az optimális esetet szélsőértékszámítással határozhatjuk meg.

▶ *TÉTEL: A másodfokú ax^2+bc+c függvény szélsőértéke* $x=-\frac{b}{2a}$

Teljes négyzetté alakítjuk a kifejezést.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

A kapott kifejezésben a, b és c konstansok, tehát a függvény legkisebb értékét akkor veszi fel, amikor a négyzetes kifejezés nulla, tehát $x=-\frac{b}{2a}$.

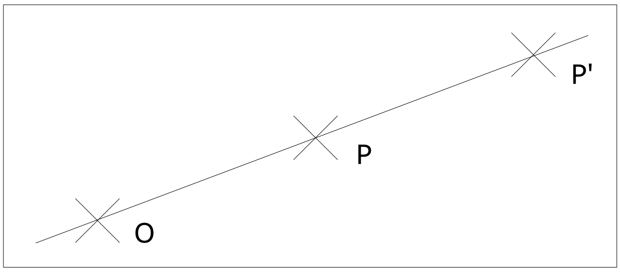
Szélsőértékében felvett helyettesítési értékét megkaphatjuk, ha behelyettesítjük a kapott x-et az eredeti képletbe:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=-\frac{b^2}{4a}+c$$

12. A hasonlóság és alkalmazásai háromszögekre vonatkozó tételek bizonyításában

▶ *A középpontos hasonlóság fogalma, tulajdonságai, síkidomok hasonlósága*

Az O pont mindig a hasonlóság centruma. Adott egy $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ szám, amely kifejezi $\overline{OP}$ és $\overline{OP'}$ arányát. P' illeszkedik az OP egyenesre. Ha $\lambda<0$, akkor O elválasztja P-t P'-től, míg ha $\lambda>0$, akkor nem. Különleges esetek: $\lambda=1$ helybenhagyás, valamint $\lambda=-1$ középpontos tükrözés. <u>Tulajdonságai:</u> egyenestartó, szögtartó. <u>Síkidomok hasonlósága:</u> két síkidom hasonló, ha létezik olyan hasonlósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi. A síkidomok kerülete λ-szorosára, területe λ^2-szeresére változik. Testek esetén felületnél λ^2-es, térfogatnál λ^3-ös szorzóval kell számolni.



▶ *A háromszögek hasonlóságának alapesetei*

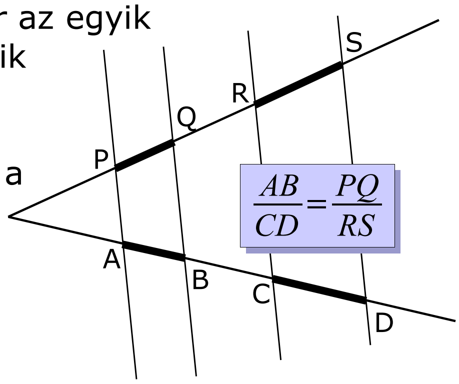
Két háromszög hasonló, ha

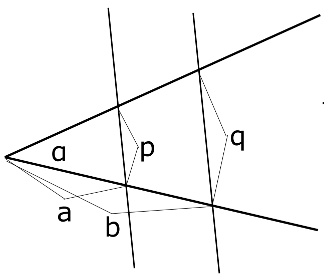
- megfelelő oldalaik aránya egyenlő;
- két-két megfelelő oldaluk aránya és az ezek által közrefogott szögük egyenlő;
- két-két megfelelő oldaluk aránya és e két-két oldal közül a nem kisebbikkel szemközt levő szögük egyenlő;
- két-két szögük páronként egyenlő.

▶ *A párhuzamos szelők tétele és a tétel megfordítása + szakasz tétel*

Ha egy szög szárait párhuzamosokkal metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával.

<u>A tétel megfordítása:</u> Ha két egyenes a szög száraiból a csúcstól számítva olyan szakaszokat vág le, amelyek aránya mindkét száron ugyanaz, akkor a két egyenes párhuzamos.





<u>Párhuzamos szelőszakaszok tétele:</u>
Ha α szöget $e \parallel f$ szelőkkel metsszük, akkor $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$

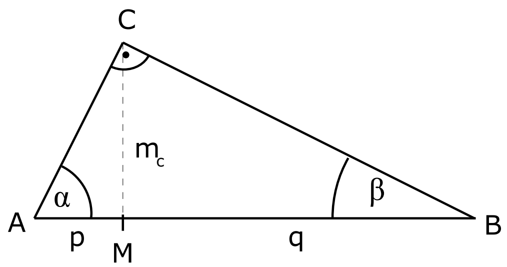
12. tétel folyt.

▶ ALKALMAZÁSOK: *Háromszögek, párhuzamos szelők tétele, hasonlóság*

- irracionális gyökök szerkesztése (pl. $\sqrt{5}$)
- szakaszok tetszőleges számú egyenlő részre osztása
- fizika: optikában nagyítás-kicsinyítés
- szögfüggvények értelmezése a háromszögek oldalainak arányain keresztül
- térképek esetén a valós világ kicsinyítése (nagyítása?)
- a nevezetes $G(a;\, b) \le A(a;\, b)$ egyenlőtlenség geometriai bizonyítása
- a befogótételt és a háromszögek középvonalaira, súlyvonalaira vonatkozó tételeket a hasonlóság alkalmazásával is be lehet bizonyítani
- aranymetszés – a természet által létrehozott formáknál sokszor $\lambda=\varphi$

▶ TÉTEL: *A magasságtétel*

Ha ABC_Δ derékszögű, akkor igaz, hogy $m_c^2 = p \cdot q$.



Az M ponttal, mely a magasság talppontja, két kisebb háromszögre (CAM_Δ és CBM_Δ) bontottuk az ABC_Δ-t. A háromszög belső szögeinek összege alapján tudjuk, hogy $90°+\alpha+\beta=180°$. CAM_Δ harmadik (MCA) szöge az előbbi egyenlőség szerint tehát β, mivel az egyik szöge α, a másik az M pontnál lévő derékszög. CBM_Δ harmadik (MCB) szöge pedig az előbbi egyenlőség szerint tehát α, mivel az egyik szöge β, a másik az M pontnál lévő derékszög. Mivel a három háromszög (CAM_Δ, CBM_Δ, ABC_Δ) mindhárom szöge megegyezik, ezért hasonlóak, tehát megfelelő oldalaik aránya is megegyezik.

β-val szemben a CMB_Δ-ben m_c, CAM_Δ-ben p található. Ugyanezekben a háromszögekben α-val szemben CMB_Δ-ben q, CAM_Δ-ben m_c helyezkedik el. A háromszög hasonlóságának alapesetei miatt tehát arányaik megegyeznek.

$$\frac{m_c}{p} = \frac{q}{m_c}$$

Mivel ha létezik a háromszög, akkor se p, se m_c nem lehet 0, így megszorozzuk velük mindkét oldalát az egyenletnek.

$$m_c^2 = p \cdot q$$

13. Derékszögű háromszögek

▶ *Derékszögű háromszög*

A derékszögű háromszög olyan háromszög, melynek egyik szöge 90°-os. Oldalainak egyedi elnevezéseik vannak, a derékszöggel szomszédos oldalak a *befogók*, az azzal szemben lévő oldal pedig az *átfogó*. Mivel az átfogóval szembeni szöge 90°, melynek szinusza 1, a szinuszos területképlet egyszerűsödik, így a derékszögű háromszög területe megegyezik két befogója szorzatának felével.

▶ *Pitagorasz-tétel és megfordítása*

Derékszögű háromszög esetén, ha C a derékszögnél van, akkor $a^2+b^2=c^2$.
Megfordítása: ha egy háromszögben két oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

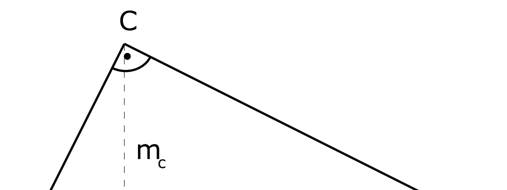
▶ *Thalész-tétel és megfordítása*

Ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk, aminek átfogója a kör átmérője.
Megfordítása: A derékszögű háromszög köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja.

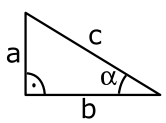
▶ *Magasságtétel, befogótételek*

<u>Magasságtétel:</u> Ha ABC$_\Delta$ derékszögű, akkor igaz, hogy $m_c^2=p\cdot q$.

<u>Befogótételek:</u> Derékszögű háromszög átfogójának és egyik befogójának erre eső merőleges vetületének szorzata egyenlő ezen befogó négyzetével. $p\cdot c=b^2$ $q\cdot c=a^2$



▶ *Szögfüggvények értelmezése derékszögű háromszögben*



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ $\text{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

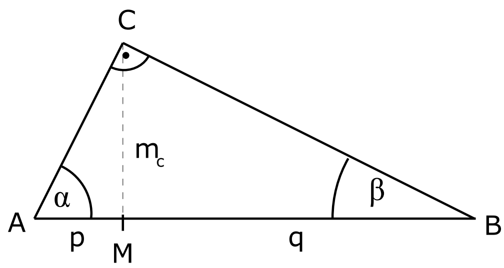
13. tétel folyt.

► *Alkalmazások: Derékszögű háromszögek*

- geometriában magasságok keresésénél
- vektorok komponensekre bontásánál (fizika – sebesség, erő...)
- Pitagorasz-tétel alapján irracionális hosszúságú szakaszok szerkesztésénél
- szögfüggvények segítségével közvetlenül nem mérhető távolságok kiszámítása

► *Tétel: A magasságtétel*

Ha ABC_Δ derékszögű, akkor igaz, hogy $m_c^2 = p \cdot q$.



Az M ponttal, mely a magasság talppontja, két kisebb háromszögre (CAM_Δ és CBM_Δ) bontottuk az ABC_Δ-t. A háromszög belső szögeinek összege alapján tudjuk, hogy 90°+α+β=180°. CAM_Δ harmadik (MCA) szöge az előbbi egyenlőség szerint tehát β, mivel az egyik szöge α, a másik az M pontnál lévő derékszög. CBM_Δ harmadik (MCB) szöge pedig az előbbi egyenlőség szerint tehát α, mivel az egyik szöge β, a másik az M pontnál lévő derékszög. Mivel a három háromszög (CAM_Δ, CBM_Δ, ABC_Δ) mindhárom szöge megegyezik, ezért hasonlóak, tehát megfelelő oldalaik aránya is megegyezik.

β-val szemben a CMB_Δ-ben m_c, CAM_Δ-ben p található. Ugyanezekben a háromszögekben α-val szemben CMB_Δ-ben q, CAM_Δ-ben m_c helyezkedik el. A háromszög hasonlóságának alapesetei miatt tehát arányaik megegyeznek.

$$\frac{m_c}{p} = \frac{q}{m_c}$$

Mivel ha létezik a háromszög, akkor se p, se m_c nem lehet 0,
így megszorozzuk velük mindkét oldalát az egyenletnek.

$$m_c^2 = p \cdot q$$

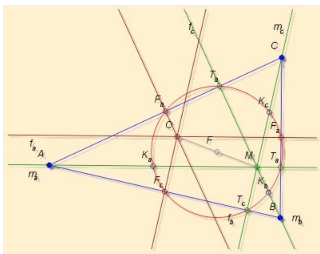
14. Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai és körei

▶ *Háromszögek nevezetes vonalai és pontjai*

- A **súlyvonal** egy oldal felezőpontját a harmadik csúccsal összekötő szakasz. Egy háromszög súlyvonalai egy pontban (súlypont) metszik egymást, ez a pont mind a három súlyvonalat 1:2 arányban osztja el.
- A **magasságvonal** a háromszög csúcsából a szemközti oldalegyenesre bocsátott merőleges egyenes. Egy háromszög magasságvonalai egy pontban (magasságpont) metszik egymást.
- A **szögfelező** a háromszög két oldalának egyenesétől egyenlő távolságra elhelyezkedő pontok halmaza. Egy háromszög szögfelezői négy pontban metszik egymást, ezek a pontok a háromszög beírható és hozzá/melléírható köreinek középpontjai.
- Az **Euler-egyenes** az az egyenes, mely tartalmazza a magasságpontot, a súlypontot és az oldalfelező merőlegesek metszéspontját.
- Az **oldalfelező merőleges** a háromszög két csúcsától egyenlő távolságra elhelyezkedő pontok halmaza. Egy háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, ez a háromszög köré írható körének középpontja.
- A **középvonal** a háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakasz. Hossza mindig fele a harmadik oldalnak.

▶ *Háromszögek nevezetes körei*

- A **beleírható kör** egy olyan kör, melynek minden oldal érintője. Középpontja belső szögfelezők metszéspontja, sugara e pontnak a távolsága bármelyik oldaltól.
- A **mellé/hozzáírható kör** egy olyan kör, melynek egy oldal és és a másik két oldal meghosszabbítása az érintője. Középpontja két külső és egy belső szögfelező metszéspontja, sugara e pontnak a távolsága a meg nem hosszabbított oldaltól.
- A **köré írható kör** egy olyan kör, melynek vonala a háromszög mint a három csúcsát tartalmazza. Középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja, sugara e pontnak a távolsága bármelyik csúcstól. Ennek speciális esete a **Thalész-kör**, mely a derékszögű háromszög köré írható köre. A Thalész-tétel megfordítása alapján tudjuk, hogy ha ennek a körnek az egyik oldal az átmérője, akkor a háromszög derékszögű.
- A **Feuerbach-kör** a háromszög kilenc nevezetes pontját – *az oldalfelező pontokat, a magasságok talppontjait és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjait* – tartalmazza. Középpontja az oldalfelezők metszéspontját a magasságponttal összekötő szakasz felezőpontja, sugara a köré írt kör sugarának fele.



14. tétel folyt.

► *ALKALMAZÁSOK: Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai és körei*

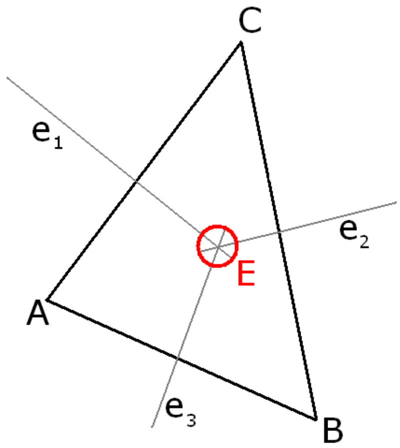
- Léteznek képletek, melyek a köré (1) vagy beleírt kör sugara (2), illetve a magasságvonalak (3) alapján határozzák meg a háromszög területét.

  (1) $T=\frac{abc}{4R}$ (2) $T=\frac{(a+b+c)\cdot r}{2}=\frac{K\cdot r}{2}$ (3) $T=\frac{a\cdot m_a}{2}=\frac{b\cdot m_b}{2}=\frac{c\cdot m_c}{2}$
- Építészetben: ha egy háromszöget a súlypontjában, vagy súlyvonala mentén támasztanak alá, akkor az statikai szempontból stabil.
- Geometriai szerkesztési feladatoknál, például külső pontból körhöz húzott érintő szerkesztése Thalész-körrel

► *TÉTEL: A háromszög oldalainak felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást*

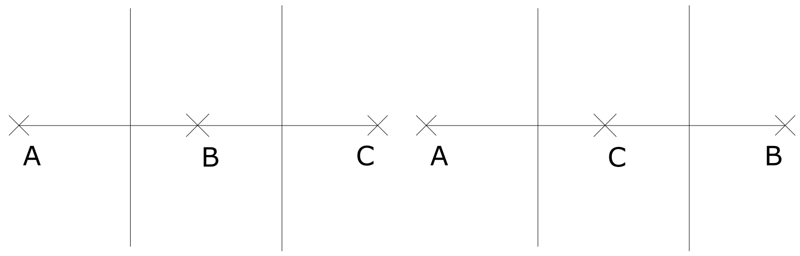
$e_1 \cap e_2 = E$ - létezik-e E?

$\overline{AE}=\overline{EB} \rightarrow \overline{AE}=\overline{EC} \rightarrow E \in e_3$



Elfajuló esetek:

$e_1 \parallel e_2$



Ekkor persze háromszög sem létezik... tehát ha nem $e_1 \parallel e_2$, akkor metszik egymást $\rightarrow$ Ha létezik a háromszög, akkor E is létezik.

15. Összefüggések a háromszögek oldalai és szögei között

Összefüggések a háromszög oldalai között

A háromszögben bármely két oldal összege nagyobb a harmadik oldalnál.
A háromszögben bármely oldal nagyobb, mint a másik két oldal különbsége.

Összefüggések a háromszög szögei között

- A háromszög belső szögeinek összege 180°.
- A háromszög külső szögeinek összege 360°.
- A háromszög bármely külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.

Összefüggések a háromszög szögei és oldalai között

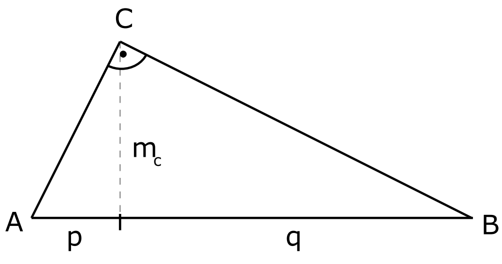
- Egy háromszögben egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak.
- Megfordítása: Ha egy háromszögben két szög egyenlő, akkor a szemközti oldalak is egyenlőek.
- Egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.
- Megfordítása: Egy háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

Derékszögű háromszög adatai közti összefüggések

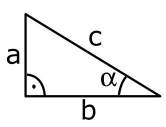
Pitagorasz-tétel:
Derékszögű háromszög esetén, ha C a derékszögnél van, akkor $a^2+b^2=c^2$.
Megfordítása: ha egy háromszögben két oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

Magasságtétel: Ha ABC$_\Delta$ derékszögű, akkor igaz, hogy $m_c^2=p\cdot q$.

Befogótételek: Derékszögű háromszög átfogójának és egyik befogójának erre eső merőleges vetületének szorzata egyenlő ezen befogó négyzetével. $p\cdot c=b^2$ $q\cdot c=a^2$



Szögfüggvények értelmezése derékszögű háromszögben



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ $\text{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

15. tétel folyt.

▶ *Szinusztétel*

A háromszög oldalainak aránya egyenlő a velük szemközti szögek szinuszának arányával. $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

▶ *Koszinusztétel*

A háromszög egyik oldalának négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének összegéből levonva ezeknek az oldalaknak és a közbezárt szög koszinuszának a kétszeres szorzatát.

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$$

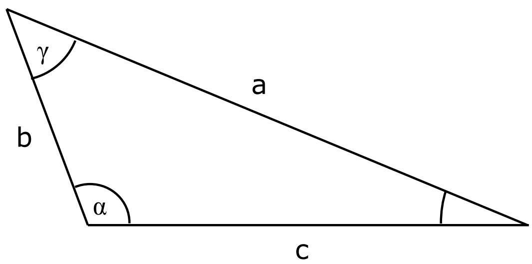
▶ *Alkalmazások: Oldal-szög összefüggések, szinusz- és koszinusztétel*

- A három oldalhossz alapján szerkesztés előtt megállapíthatjuk, hogy létezhet-e a háromszög.
- Matematikai feladatok megoldásakor a háromszög hiányzó adatait megkaphatjuk a fenti összefüggésekkel.
- Fizikában erő ill. sebesség vektorok hajlásszögét szögfüggvényekkel számoljuk.
- Földmérésnél a távolságot látószög alapján meg tudják határozni.
- Szinusztétel segítségével nevezetes szögek (0°, 30°, 45°, 60°, 90°) szögfüggvényeinek értéke pontosan meghatározható.

▶ *Tétel: Szinusztétel*

Az ABC háromszög területét a szinuszos területképlettel két alakban is felírhatjuk, mindkettő ugyanazt a területet adja meg, így egyenlőek.

$$\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}=\frac{c\cdot b\cdot\sin\alpha}{2}$$



Mivel a háromszög csak akkor létezhet, ha b>0, ezért mindkét oldalt osztjuk b-vel és szorozzuk kettővel.

$$a\cdot\sin\gamma=c\cdot\sin\alpha$$

Az *a* oldal hossza szintén nagyobb nullánál, valamint $\sin\alpha$ csak akkor lehet nulla, ha vagy 0, vagy 180 fokos, ekkor ismét nincs háromszög. Így nyugodtan oszthatjuk mindkét oldalt a-val és $\sin\alpha$-val. Így a szinusztételt kapjuk meg.

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{c}{a}$$

16. Húrnégyszög, érintőnégyszög, szimmetrikus négyszögek

► *Húrnégyszög*

Húrnégyszögnek nevezzük azokat a konvex négyszögeket, amelyeknek minden csúcsa ugyanazon a körön van.

- Az oldalak felező merőlegesei egy pontban metszik egymást.
- A fenti pont a köré írható kör középpontja.
- Szemközti szögeik 180°-ra egészítik ki egymást.
- Ide tartozik például minden négyzet, téglalap és szimmetrikus trapéz.

► *Érintőnégyszög*

Érintőnégyszögnek nevezzük azokat a konvex négyszögeket, amelyeknek minden oldala egy adott kör érintője.

- Szögfelezőik egy pontban metszik egymást.
- A fenti pont a beírható kör középpontja.
- Szemközti oldalainak összege egyenlő.
- Ide tartozik például minden négyzet, rombusz és deltoid.

► *Szimmetrikus négyszögek*

Tengelyesen szimmetrikus négyszögek:
Egy négyszög akkor tartozik ide, ha létezik olyan *t* egyenes, amelyre tengelyesen tükrözve tükörképe önmaga. Ilyenek például a deltoidok és a húrtrapézok. A rombuszoknak és a téglalapoknak legalább két szimmetriatengelyük van.

Középpontosan szimmetrikus négyszögek:
Egy négyszög akkor tartozik ide, ha létezik olyan O pont, amelyre középpontosan tükrözve tükörképe önmaga. Ilyenek például a paralelogrammák.

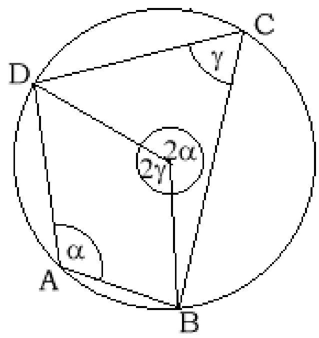
Forgásszimmetrikus négyszögek:
Egy négyszög akkor tartozik ide, ha létezik olyan O pont és α szög (α nem osztható 2π-vel!), hogy O körül α-val elforgatva képe önmaga. Ilyenek a négyzetek.

► *Alkalmazások: Húr-, érintő- és szimmetrikus négyszögek*

- Geometriai számításoknál és feladatoknál
- Vektorösszegzésnél (sebesség, erő...)
- Művészetben, építészetben
- Parkettázásnál
- Kémia: a bizonyos kristályszerkezeteket szabályos négyszögek alkotnak.

► *TÉTEL: A húrnégyszög-tétel*

A tétel igazolásához az ábra húrnégyszögének két átellenes csúcsához meghúzzuk a sugarakat. Így az α és γ a kerületi szögekhez, a húrnégyszög két szemközti szögéhez tartozó középponti szögek is láthatók. Ezek együttesen egy teljes szöget alkotnak: $2\alpha+2\gamma=360°$, így $\alpha+\gamma=180°$.



17. Sokszögek, szimmetrikus sokszögek

▶ *Sokszögek*

<u>Definíciók:</u>

- Konvex sokszögnek nevezzük azt a sokszöget, amelynek minden szöge konvex, azaz 180°-nál kisebb.
- Konkáv sokszögnek nevezzük azt a sokszöget, amelynek van konkáv szöge.
- Szabályos sokszögnek nevezzük azt a sokszöget, amelynek minden oldala és minden szöge egyenlő.

<u>Tulajdonságok:</u>

- Az *n* oldalú konvex sokszög átlóinak száma $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ ahol $n \geq 3$ és $n \in \mathbf{N}$.
- Az *n* oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180^\circ$.
- Az *n* oldalú konvex sokszög külső szögeinek összege 360°.
- Az *n* oldalú szabályos konvex sokszög bármely belső szögének nagysága $\frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ$ bármely külső szögének nagysága $\frac{360^\circ}{n}$
- A szabályos sokszögek mind hasonlóak (pl. két szabályos nyolcszög).

▶ *Szimmetrikus sokszögek*

<u>Tengelyesen szimmetrikus sokszögek:</u>

Egy sokszög akkor tartozik ide, ha létezik olyan *t* egyenes, amelyre tengelyesen tükrözve tükörképe önmaga. Ilyen az

- egyenlő szárú és az egyenlő oldalú háromszög, a
- négyszögek közül a deltoid és a húrtrapéz (rombusznak, téglalapnak legalább kettő), és az
- összes szabályos sokszög (annyi tengely, ahány oldal; metszéspontjuk a köré írható kör középpontja).

<u>Középpontosan szimmetrikus sokszögek:</u>

Egy sokszög akkor tartozik ide, ha létezik olyan O pont, amelyre középpontosan tükrözve tükörképe önmaga. Ilyen a

- paralelogramma és az
- összes páros oldalszámú szabályos sokszög.

<u>Forgásszimmetrikus sokszögek:</u>

Egy sokszög akkor tartozik ide, ha létezik olyan O pont és α szög (α nem osztható 2π-vel!), hogy O körül α-val elforgatva képe önmaga. Ilyen a

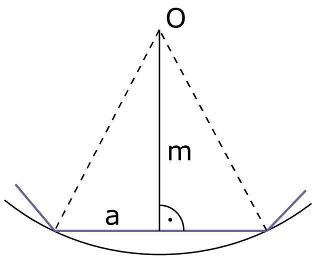
- szabályos háromszög (középpontjára 120°-kal*), a
- négyzet (középpontjára 90°-kal*), és az
- összes szabályos sokszög
  (szimmetriatengelyek metszéspontjára $\frac{360^\circ}{n}$ -nel*)

---

* A forgásszimmetria az említett szögek egész számú többszöröseire is érvényes.

17. tétel folyt.

► *Szabályos sokszögek területe, kerülete*



Jelölések: O a sokszög köré írt kör középpontja, *a* az oldalhossz és *n* a sokszög oldalainak száma.

- Kerület: $K = n \cdot a$
- Terület: $T = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a \cdot m$ *(m-et szinusztétel adhatja meg)*

► *Alkalmazások: Sokszögek, szimmetrikus sokszögek*

- Kettőnél több vektor összegzését sokszög-módszerrel is végezhetjük.
- Mobiltelefon-cellák tervezésénél szabályos hatszögeket vesznek alapul.
- Kör területét és kerületét egy köré és egy beleírt sokszöggel közelítéssel is meg lehet határozni (minél nagyobb *n*, annál pontosabban).
- Számítógépes grafikánál a görbült felületeket sokszögekkel próbálják leképezni.
- A kristályszerkezetek szabályos sokszögeket alkotnak (pl. grafit).
- Járdákat, padlót általában szabályos sokszög alakú kövekkel raknak ki.

► *Tétel: Az n-oldalú sokszög belső szögeinek összege*

A konvex sokszög bármely csúcsából n-3 átló húzható. Ezek a sokszöget n-2 darab háromszögre bontják. Ezek belső szögeinek az összege azonos az n-oldalú konvex sokszög belső szögeinek összegével, tehát összegük $(n-2) \cdot 180^{\circ}$.

18. A kör és részei, kör és egyenes kölcsönös helyzete, kerületi szög, középponti szög

A kör és részei

A kör két részből áll; körvonalból és körlapból.

- A **körlap** a síkban egy adott ponttól (O) adott távolságon belül (r) elhelyezkedő pontok halmaza.
- A **körvonal** a síkban egy adott ponttól (O) egyenlő távolságra (r) elhelyezkedő pontok halmaza.

A kör további részei:

- Az O a kör **középpontja**, r a kör **sugara**.
- Két egy egyenesbe eső sugár együtt az **átmérő**.
- A körvonal két pontját összekötő szakasz a **húr**.
- A körvonalat két pontja két **körív**re bontja.
- A körlemezt a kör bármely húrja két **körszelet**re bontja.
- A **körcikk** két sugárral és egy körívvel határolt körlaprész.
- A **körgyűrű** a síkban egy adott ponttól (O) adott távolságon belül (R) és adott távolságon kívül (r) elhelyezkedő pontok halmaza.
- A **körgyűrűcikk** két sugárral és két körívvel határolt körgyűrűrész.

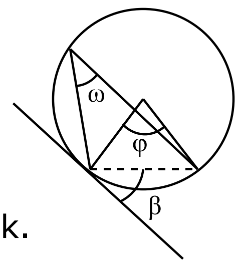
Kerület, terület és ezek viszonyai

- A teljes kör területe $r^2\pi$, kerülete $2r\pi$.
- Körcikk területe és ívének hossza (kerülete) egyenesen arányos a két sugár által bezárt szöggel.
- Körgyűrű területe megegyezik a külső és a belső sugár által alkotott kör területének különbségével.
- Körgyűrűcikk területe egyenesen arányos a két sugár által bezárt szöggel.

Kör és egyenes kölcsönös helyzete

- <u>Kitérő:</u> A körvonalnak és az egyenesnek **nincs** közös pontja.
- <u>Érintő:</u> A körvonalnak és az egyenesnek **egy** közös pontja van, az ide húzott sugár merőleges az érintő egyenesre. Egy külső pontból húzott két érintőszakasz egyenlő hosszú.
- <u>Szelő:</u> A körvonalnak és az egyenesnek **két** közös pontja van.

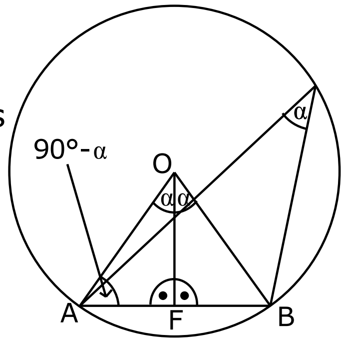
Kerületi és középponti szög



<u>Kerületi szög:</u> A körvonal bármely pontját a szelőszakasz két végével összekötő szakaszok szöge (ω). (érintőszárú is lehet: β)
<u>Középponti szög:</u> A kör középpontját a szelőszakasz két végével összekötő szakaszok szöge (φ).
A középponti szög mindig kétszerese a kerületinek.
Adott kör adott ívéhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.

18. tétel folyt.

► *A látószög, a látókörív szerkesztése*

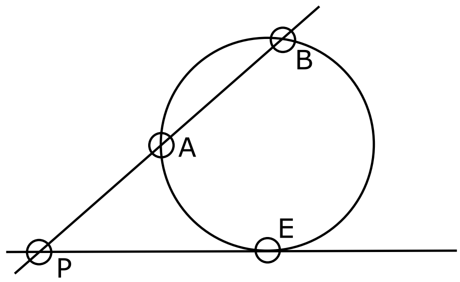


Megadott α és AB esetén azon pontok mértani helyét kapjuk meg, melyekről α szögben látszik AB. A szerkesztés menete: felvesszük AB-t, megfelezzük, megszerkesztjük a 90°-α szöget, odamásoljuk A-ba, ahol metszik a felezőt, ott lesz a kör közepe, a sugár $\overline{OA}$. A látókörív speciális esete Thalész tétele, ahol α pont 90°, az AB szakasz a kör átmérője, felezőpontja tehát a kör középpontja (F=O).

► *Alkalmazások: Kör és szögei*

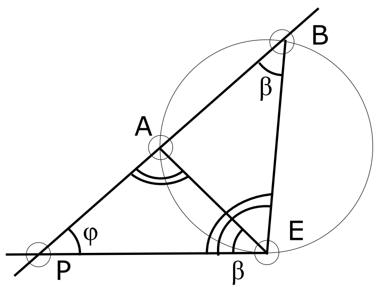
- tervezésnél, építészetben
- fizikában körmozgásnál
- statisztikában kördiagram
- földmérésnél a távolságot látószög alapján meg tudják határozni
- szerkesztési feladatoknál, például külső pontból érintő szerkesztése egy adott körhöz
- szögeket mérése a hozzájuk tartozó egységsugarú ív hosszával *(radián)*

► *Tétel: Az érintőszakasz hossza a szelődarabokénak a mértani közepe*



A tétel az ábra jelölései alapján a következőt állítja: $\sqrt{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}=\overline{PE}$, mely minden szelő esetén igaz.

<u>Bizonyítás:</u> meghúzzuk az EA és EB szakaszt. A kerületi és középponti szögek tétele alapján belátjuk, hogy az EAP és a BEA szög egyenlő (β). Mivel így két-két szögük (φ és β) egyenlő, így a PAE_Δ és a PEB_Δ hasonló. Ha pedig hasonlóak, akkor megegyeznek az oldalaik arányai, tehát:



$\frac{\overline{PA}}{\overline{PE}}=\frac{\overline{PE}}{\overline{PB}}$ / megszorozzuk $\overline{PE}$ -vel és $\overline{PB}$ -vel

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PE}^2$ / gyököt vonunk

$\sqrt{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}=\overline{PE}$ ✓

19. Vektorok

► *Fogalmak és jelölések*

A vektor fogalmát az eltolásban vezettük be és eredményesen alkalmazhatjuk a matematika több területén.

- A vektor irányított szakasz, melyet iránya, állása, és hossza jellemez.
- A vektor hosszát a vektor abszolút értékének nevezzük.
- Akkor mondjuk, hogy megadtunk egy vektort, ha ismerjük irányát, állását, és abszolút értékét.
- A vektorokat aláhúzott kisbetűkkel, vagy kezdő- és végpontjuk jele fölé húzott nyíllal ($\overrightarrow{AB}$), nyomtatásban félkövér betűvel jelöljük.
- Két vektor egyenlő, ha megegyezik irányuk, állásuk és abszolút értékük.
- Két párhuzamos vektor egymás ellentettje, ha megegyezik abszolút értékük, de ellentétes állásúak. **v** ellentettjének jele -**v**.
- Két párhuzamos vektor szöge 0°-os, illetve 180°-os, aszerint, hogy e vektorok egyállásúak vagy ellentétes állásúak.
- Két nem párhuzamos vektor szögét úgy kapjuk meg, hogy közös kezdőpontba toljuk el őket, majd a keletkező kisebb szöget választjuk.

► *Vektorműveletek*

Vektorok összeadása és különbsége:
Vektorokat úgy adunk össze, hogy az összeadandó vektorokat az előző vektor végpontjába toljuk el. Az összeadás eredménye az a vektor, amely az első vektor kezdőpontjából az utolsó vektor végpontjába mutat. A vektorösszeadás *kommutatív* (felcserélhető) és *asszociatív* (csoportosítható) művelet. Vektorok kivonását szintén az előbbi művelettel végezzük el, csak a kivonandó vektor ellentettjét adjuk hozzá a kisebbítendőhöz. A kivonás már nem kommutatív művelet. Speciális eset, ha egy vektorból saját magát vonjuk ki, ennek eredménye a nullvektor, amelynek iránya tetszőleges, abszolút értéke 0.

Vektor szorzása skalárral:
Egy λ pozitív szám és egy **a** vektor szorzata az a vektor, amely az **a** vektorral egyállású és egyirányú, abszolút értéke pedig λ-szorosa az **a** abszolút értékének. Egy λ negatív szám és egy **a** szorzata az a vektor, amely az **a**-val egyállású és ellentétes irányú, abszolút értéke pedig |λ|-szerese az **a** abszolút értékének. Bármely vektort nullával szorozva nullvektort kapunk.

Vektorok skaláris szorzata:
Két vektor skaláris szorzatán a két vektor abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük. Ebből következik, hogy a szorzat csak akkor lehet nulla, ha legalább egy vektor nulla, vagy merőlegesek egymásra. A skaláris szorzás kommutatív és részben disztributív (csoportosítható; a szorzatot megszorozva egy számmal, ill. ezt a számot a szorzatba bevíve az eredmény nem változik) művelet.

19. tétel folyt.

Vektorok felbontása:
Ha a **v**, az **i** és a **j** olyan, egy síkban lévő vektorok, hogy az **i** és a **j** nem párhuzamos, akkor a **v** egyértelműen bontható fel két olyan vektor összegére, amelyek egyike az **i**-ral, másik a a **j**-ral egyállású, azaz $\vec{v}=v_1\cdot\vec{i}+v_2\cdot\vec{j}$.

▶ *Vektorműveletek koordináta-rendszerben*

- két vektor összege: megfelelő koordinátákat összeadjuk $\vec{v}(x_1+x_2;y_1+y_2)$
- két vektor különbsége: megfelelő koordináták különbsége $\vec{v}(x_1-x_2;y_1-y_2)$
- vektor számszorosa: koordináták számszorosát vesszük $\vec{v}(x\cdot\alpha;y\cdot\alpha)$
- vektor ellentettje: koordináták ellentettjét vesszük $\vec{v}(-x;-y)$
- két vektor skaláris szorzata: megfelelő koordináták szorzatának összege (a skaláris szorzat két alakjával határozható meg a hajlásszög)
- helyvektor abszolút értékét Pitagorasz-tétellel kaphatjuk meg: $|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$
- vektor elforgatása 90°-kal: megcseréljük a két koordinátát és az egyiknek az ellentettjét vesszük $a(x;y)\rightarrow b(-y;x)$ $c(y;-x)$

▶ *Alkalmazások: Vektorok*

- Fizikában többek között az erő, a lendület, a gyorsulás, és a sebesség vektormennyiségek, a mechanikai munkát például az erő és az elmozdulás vektorok skaláris szorzata adja.
- Geometriában egy szakaszt tetszőleges részre feloszthatunk két végpontjának helyvektorainak aránya alapján.
- Trigonometriában tetszőleges szög szinuszát/koszinuszát meghatározhatjuk.
- Koszinusztétel bizonyításához felhasználható a skaláris szorzat.

▶ *Tétel: Vektorok skalárszorzata koordinátákkal*

A két vektort felbontjuk **i** és **j** merőleges egységvektorok összegére.

$$\vec{a}=a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j} \qquad \vec{b}=b_1\cdot\vec{i}+b_2\cdot\vec{j}$$

A két vektornak vesszük a skaláris szorzatát és a szorzást számok szorzásához hasonlóan végezzük el.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}\right)\cdot\left(b_1\cdot\vec{i}+b_2\cdot\vec{j}\right)=a_1\cdot b_1\cdot\vec{i}\cdot\vec{i}+a_1\cdot b_2\cdot\vec{i}\cdot\vec{j}+a_2\cdot b_2\cdot\vec{j}\cdot\vec{j}+a_2\cdot b_1\cdot\vec{j}\cdot\vec{i}$$

Mivel mind **i**, mind **j** saját magával 0°-os szöget zár be, melynek koszinusza 1, valamint hossza egy, ezért **i²** és **j²** egyaránt 1. Mivel **i** és **j** egymásra merőleges, ezért skaláris szorzatuk cos(90°)=0 miatt 0. Így vektoros tagok kiesnek.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$$

20. Szakaszok és egyenesek a koordinátasíkon

▶ *Szakaszok a koordinátasíkon*

- Egy szakaszt koordinátarendszerben két végpontjával adunk meg.
- Az AB hosszát két végpontja alapján Pitagorasz-tétel segítségével számolhatjuk ki: $\overline{AB}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$
- Az AB szakaszt p:q arányban osztó O pontját a következő képlettel kapjuk meg: $O\left(\frac{q\cdot a_1+p\cdot b_1}{p+q};\frac{q\cdot a_2+p\cdot b_2}{p+q}\right)$

▶ *Egyenesek megadása*

Az egyeneseket elsőfokú kétismeretlenes (x és y) egyenletekkel adjuk meg, melyet csak az egyenes pontjai teszik igazzá, más pontok nem.
Egy egyenest egy ponttal $P_0(x_0;\ y_0)$ és az alábbi adatok egyikével adhatunk meg:

- Irányvektor: az egyenessel párhuzamos, nullvektortól különböző vektor.
  v irányvektor esetén: $\vec{v}(v_1;v_2)\ \rightarrow\ v_2x-v_1y=v_2x_0-v_1y_0$
- Normálvektor: az egyenesre merőleges, nullvektortól különböző vektor.
  n normálvektor esetén: $\vec{n}(A;B)\ \rightarrow\ Ax+By=Ax_0+By_0$
- Meredekség: az egyenes irány- (x tengellyel bezárt) szögének tangense.
  [Az **y** tengellyel párhuzamos egyeneseknek nem értelmezzük a meredekségét.]
  m meredekség esetén: $y-y_0=m(x-x_0)$
- Másik pont: egy P0-tól különböző pont a síkban.
  $P_1(x_1;\ y_1)$ pont esetén: $(y_1-y_0)\cdot(x-x_0)=(x_1-x_0)\cdot(y-y_0)$

Az egyenest megadhatjuk ezen kívül még tengelymetszeteivel is: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

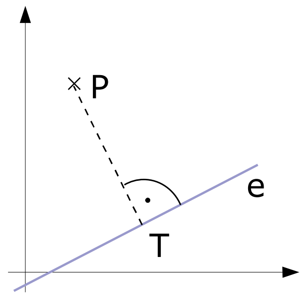
▶ *Egyenesek egymás közt*

- Két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha normálvektoraik illetve irányvektoraik is párhuzamosak; ha mindkettőnek van iránytényezője, akkor iránytényezőjük egyenlő.
- Két egyenes akkor és csak akkor merőleges, ha normálvektoraik illetve irányvektoraik is merőlegesek, azaz skaláris szorzatuk 0. Ha mindkettőnek van iránytényezője, akkor iránytényezőik szorzata 1.
- Ha két egyenes nem párhuzamos, a metszéspont koordinátái a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásai.

20. tétel folyt.

► *Pont és egyenes távolsága*

Pont és egyenes távolsága a pontból az egyenesre állított merőleges talppontjának és a tekintett pontnak a távolsága. A PT távolság meghatározásához szükségünk van a T pont koordinátáira. Ezek a P-re illeszkedő, e-re merőleges f egyenes (szaggatott) egyenletéből és az e egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásaiként adódnak.



A megoldás lépései:

I. f egyenletének felírása
II. e+f egyenletrendszer megoldása » T koordinátái
III. PT távolság meghatározása Pitagorasz-tétellel

► *Két párhuzamos egyenes távolsága*

Kiválasztjuk az egyik egyenes **x** tengellyel való metszéspontját (y=0), majd a kapott pontnak és a másik egyenesnek a távolságát a fenti módon kiszámoljuk. Amennyiben az egyenesek párhuzamosak az **x** tengellyel, **y**-nal is megoldható.

► *Két metsző egyenes hajlásszöge*

Két (nem null-) vektor szögét meg tudjuk határozni a skaláris szorzat segítségével. Két egyenes hajlásszöge pedig megegyezik az irányvektoraik által bezárt szöggel. Az egyenesek irányvektora leolvasható az egyenletből az előző oldali formára alakítva.

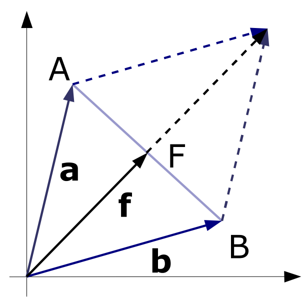
$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_e \cdot \vec{v}_f}{|\vec{v}_e| \cdot |\vec{v}_f|} = \frac{v_{ex} \cdot v_{fx} + v_{ey} \cdot v_{fy}}{\sqrt{v_{ex}^2 + v_{ey}^2} \cdot \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2}}$$

► *Alkalmazások: Szakaszok és egyenesek a koordinátasíkon*

- Lineáris programozásnál az optimális eset metszéspontját egyenespárok egyenletéből álló egyenletrendszerekkel kapjuk meg.
- Geometriai feladatok megoldásánál segíthet.

► *Tétel: A szakasz felezőpontjának koordinátái a végpontok megfelelő koordinátáinak számtani közepei*

Legyen a felezendő szakasz két végpontja A(a_1; a_2) és B(b_1; b_2), a két végpontba mutató helyvektor **a** és **b**. **b** vektort eltoljuk A pontba, **a** vektort pedig B pontba, így – mivel a szemben lévő oldalak egyenlőek – egy paralelogramma jön létre, melynek egyik átlója az AB szakasz, másik átlója pedig az **a**+**b** vektor. A paralelogramma átlói felezik egymást, így az AB szakasz felezőpontja (F) megegyezik az **a**+**b** vektor felezőpontjával, tehát F helyvektora **a**+**b** fele.



Vektorokkal kifejezve: $\vec{f} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ » számtani közép

Mivel a helyvektorok koordinátái megegyeznek végpontjuk koordinátáival, az állítást igazoltnak tekinthetjük.

21. Kör és parabola a koordinátasíkon

► *Kör megadása koordinátasíkon*

A kört a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben egy kétismeretlenes lineáris egyenlettel tudjuk megadni. Ezt az egyenletet a kör pontjai, és csak azok elégítik ki. Az (u; v) középpontú *r* sugarú kör egyenlete: $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$. Egy kétismeretlenes másodfokú egyenlet akkor és csak akkor egyenlete egy körnek a síkbeli koordináta-rendszerben, ha $x^2+y^2+Ax+Bx+C=0$ alakra hozható, ahol A, B, C olyan valós számok, amelyekre teljesül az $A^2+B^2-4C>0$ egyenlőtlenség.

► *Kör és egyenes kölcsönös helyzete a koordinátasíkon*

Egy körnek és egy egyenesnek (ha van) egy vagy két közös pontja lehet. Ezek koordinátáit a kör és az egyenes egyenletéből álló kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszer gyökei adják meg. Az egyenes helyzete az alábbiak szerint:

- Kitérő: A körvonalnak és az egyenesnek **nincs** közös pontja (nincs gyök).
- Érintő: A körvonalnak és az egyenesnek **egy** közös pontja van, az ide húzott sugár merőleges az érintő egyenesre. Egy külső pontból húzott két érintőszakasz egyenlő hosszú (egy gyök – diszkrimináns értéke nulla).
- Szelő: A körvonalnak és az egyenesnek **két** közös pontja van (két gyök).

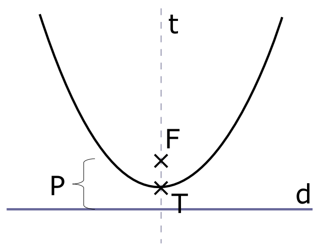
► *Két kör kölcsönös helyzete a koordinátasíkon*

Két körnek (ha van) egy vagy két közös pontja lehet. Ezek koordinátáit a két kör egyenletéből álló kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszer gyökei adják meg. A két kör helyzete az alábbiak szerint:

- Kitérő: A két körnek **nincs** közös pontja (nincs gyök – $D<0$).
- Érintő: A kér körnek **egy** közös pontja van (egy gyök – $D=0$).
- Szelő: A két körnek **két** közös pontja van (két gyök – $D>0$).

► *Parabola fogalma és megadása koordinátasíkon*

A parabola azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek a sík egy *d* egyenesétől és egy *d*-re nem illeszkedő *F* pontjától vett távolsága egyenlő. *F* a parabola fókuszpontja, *d* a parabola vezéregyenese, *t* a parabola tengelye. A tengely *F* és *d* közötti szakaszának *T* felezőpontja illeszkedik a parabolára. A *T* a parabola tengelypontja. *F* és *d* távolsága a parabola paramétere, jele *p* ($p>0$).



21. tétel folyt.

A *p* paraméterű, T(u; v) tengelypontú, **y** tengellyel párhuzamos tengelyű „fölfele nyíló' parabola egyenlete:

$$y=\frac{1}{2p}\cdot(x-u)^2+v$$

Ezt az egyenletet a parabola pontjai, és csak azok elégítik ki.

► *Parabola és egyenes kölcsönös helyzete a koordinátasíkon*

Egy parabolának és egy egyenesnek (ha van) egy vagy két közös pontja lehet. Ezek koordinátáit a parabola és az egyenes egyenletéből álló kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszer gyökei adják meg. Az egyenes helyzete lehet

- Kitérő: A parabolának és az egyenesnek **nincs** közös pontja (nincs gyök).
- Érintő: A parabolának és az egyenesnek **egy** közös pontja van (egy gyök).
- Szelő: A parabolának és az egyenesnek **két** közös pontja van (két gyök).

A parabola tetszőleges pontjában az érintő egyenes meredekségét a parabola egyenletének első deriváltja adja.

► *ALKALMAZÁSOK: Kör és parabola a koordinátasíkon*

- A parabola formájú tükör a sugarakat a fókuszpontjába gyűjti össze.
- Geometriai feladatoknál algebrai módszerekkel meghatározhatjuk körök/parabolák/egyenesek viszonyát.

► *TÉTEL: Bármely, a valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvény grafikonja olyan parabola, amelynek tengelye párhuzamos az y tengellyel*

Tekintsük az $f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú függvényt és tegyük fel, hogy $a>0$. Az egyenlet ($y=ax^2+bx+c$) jobb oldalát teljes négyzetté alakítjuk.

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

ebből

$$y+\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

Ezt összehasonlítva a *p* paraméterű, T(u; v) tengelypontú, **y** tengellyel párhuzamos tengelyű „fölfele nyíló' parabola

$y=\frac{1}{2p}\cdot(x-u)^2+v$ egyenletével, kapjuk, hogy $u=\frac{-b}{2a}$, $v=\frac{-b^2-4ac}{2a}$, $p=\frac{1}{2a}$

vagyis az $f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú függvény grafikonja az y tengellyel párhuzamos tengelyű, $T\left(\frac{-b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{2a}\right)$ tengelypontú, $\frac{1}{2a}$ paraméterű parabola.

Az $a<0$ esetre a bizonyítás hasonló, ebben az esetben a paraméter $-\frac{1}{2a}$.