

PRÓBAÉRETTSÉGI

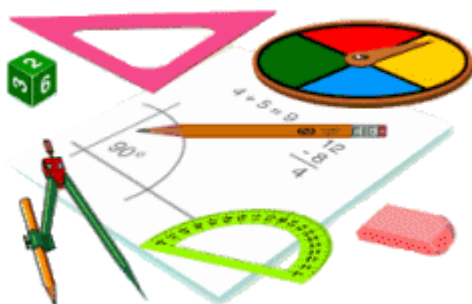
2003. május-június

MATEMATIKA

SZÓBELI

EMELT SZINT

Tanulói példány



A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kötöttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
 - *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
 - a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
 - a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)
-

1. Halmazok, halmazműveletek

Alapfogalmak, halmazműveletek, számosság, számhalmazok, nevezetes pont-halmazok és metszetük (kör, parabola, szakaszfelező merőleges, szögfelező stb.)

Definíció például: részhalmaz, egyesítés, metszet, különbség, kommutativitás, asszociativitás, véges halmaz, megszámlálhatóan végtelen számosság.

Bizonyítandó tétel például: a háromszög köré, illetve beírt körének középpontja.

Feladat

Egy matematikaversenyen két feladatot tűztek ki. Az első feladatot az indulók 70%-a, a másodikat pedig az indulók 60%-a oldotta meg. Minden induló megoldott legalább egy feladatot, és kilencen mindkét feladatot megoldották. Hányan indultak a versenyen?

Alkalmazások

A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kötöttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
 - *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
 - a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
 - a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)
-

2. Számelmélet, oszthatóság

Osztó, többszörös, prím, relatív prím, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, oszthatósági szabályok (2, 3, 4, 5, 6, 8, 9), számelmélet alaptétele, számrendszerek.

Definíció például: osztó, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, relatív prím.

Bizonyítandó tétel például: $\sqrt{2}$ irracionális szám, végtelen sok prímszám van, a 3-mal való oszthatóság feltétele, $a - b$ osztója $(a^3 - b^3)$ -nek.

Feladat

Az $N := \overline{abca}$ alakú számban a különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek. Tudjuk, hogy $15 \mid N$ és $a + c = 11$. Határozza meg az összes ilyen számot!

Alkalmazások

A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kötöttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
 - *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
 - a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
 - a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)
-

3. Hatványozás

Pozitív egész, negatív egész kitevőjű hatvány és törtekitevőjű hatvány, normálalak, azonosságok, permanenciaelv, a hatványozás inverz műveletei, exponenciális függvény.

Definíció például: nulla kitevő értelmezése, törtekitevő értelmezése, exponenciális függvény.

Bizonyítandó tétel például: valamelyik azonosság bizonyítása (hatványozás, logaritmus).

Feladat

Határozza meg a következő egyenlet igazsághalmazát, ha x valós szám!

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} - 6 \cdot 9^{\frac{x-4}{2}} + 2 \cdot 3^{x-6} = 29.$$

Alkalmazások

A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kötöttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
 - *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
 - a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
 - a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)
-

4. Másodfokú függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek

A másodfokú függvény és jellemzése. Megoldóképlet, diszkrimináns, Viète-formulák (gyökök és együtthatók közötti összefüggések), gyöktényezős alak, másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek algebrai illetve grafikus megoldása.

Definíció például: másodfokú egyenlet, diszkrimináns, függvény fogalma, zérushely.

Bizonyítandó tétel például: megoldóképlet, Viète-formulák.

Feladat

Egy üzemben az összköltség alakulását a $K(x) = 500 + 30x + (x - 10)^2$ függvény írja le, ahol x az előállított termékek számát jelenti ($x > 10$). Az árbevételt a $B(x) = 65x$ függvény írja le.

a, Legfeljebb hány termék esetén lesz a termelés nyereséges?

b, Hány terméket kell előállítani, hogy a nyereség maximális legyen?

Alkalmazások

A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kötöttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
- *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
- a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
- a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)

5. Egybevágóság

Síkbeli egybevágósági transzformációk, két alakzat egybevágósága, háromszögek egybevágósági alapesetei, sokszögek egybevágósága, alakzatok szimmetriái.

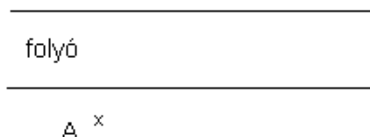
Definíció például: valamelyik távolságtartó transzformáció.

Bizonyítandó tétel például: Pitagorasz tétel.

Feladat

Egy síkság két faluja, Alvég és Felvég között egy folyó folyik. Tervezze meg a két falu között a legrövidebb utat, híddal együtt! (A hídnak merőlegesnek kell lennie a partra.)

x F



Alkalmazások

A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kötöttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
- *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
- a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
- a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)

6. Hasonlósági transzformációk

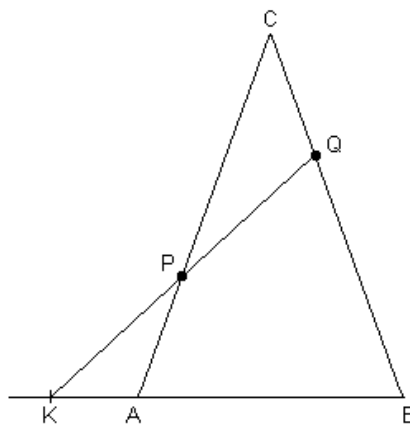
Középpontos hasonlóság, hasonlósági transzformációk, alakzatok hasonlósága, háromszögek hasonlóságának alapesetei, magasság- és befogótétel, a háromszög súlypontja, hasonló síkidomok területének és hasonló testek térfogatának az aránya.

Definíció például: középpontos hasonlóság, hasonlósági transzformációk.

Bizonyítandó tétel például: befogótétel.

Feladat

Az ábrán látható egyenlő szárú háromszög szárainak harmadolópontja P és Q . A rajtuk áthaladó egyenes az alap egyenesét K -ban metszi. Határozza meg a $\frac{KA}{KB}$ arányt!



Alkalmazások

A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kötöttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
 - *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
 - a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
 - a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)
-

7. Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

Háromszög-egyenlőtlenség, belső szögösszeg, külső szögösszeg, $a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$, $a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$, Pitagorasz-tétel, hegyesszögek szögfüggvényei, szinusztétel, koszinusztétel.

Definíció például: külső szög, hegyesszögek szögfüggvényei.

Bizonyítandó tétel például: Pitagorasz-tétel, szinusztétel, koszinusztétel.

Feladat

Egy hegy csúcsát a vízszintes terep egy pontjából α , majd d m-t távolodva β emelkedési szögben látjuk. Milyen magas a hegy? Mekkora e magasság, ha $d = 200$ m, $\alpha = 42^\circ$, $\beta = 33^\circ$?

Alkalmazások

A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kötöttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
 - *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
 - a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
 - a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)
-

8. Nevezetes vonalak és pontok a háromszögben

Oldalfelező merőleges, szögfelező, magasság, súlyvonal, középvonal, köré írható kör középpontja, beírható kör középpontja, magasságpont, súlypont.

Definíció például: magasság, súlyvonal.

Bizonyítandó tétel például: magasságpont létezése.

Feladat

Egyenlő oldalú háromszög egyik szára 13 cm, alapja 24 cm. Számítsa ki a háromszög súlypontjának a háromszög köré írható kör középpontjától való távolságát!

Alkalmazások

A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kööttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
 - *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
 - a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
 - a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)
-

9. Négyszögek

Négyszögek osztályozása, speciális négyszögek definíciói, a paralelogramma ekvivalens definíciói, speciális négyszögekre vonatkozó tételek, négyszögek területe.

Definíció például: trapéz, érintőnégyszög.

Bizonyítandó tétel például: húrnégyszög tétel, érintőnégyszög tétel.

Feladat

Mekkora a tengelyesen szimmetrikus érintőtrapéz párhuzamos oldalainak aránya, ha a beírt kör érintési pontjai által meghatározott deltoid egyik átlója harmadolja a másik átlót?

Alkalmazások

A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kötöttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
- *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
- a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
- a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)

10. A kör

A kör és részei, középponti szög, ív, körcikk területe, szögmérés, kerületi és középponti szögek, látókör, Thalész tétel, a kör érintői, a kör egyenlete, a kör és a másodfokú kétismeretlenes egyenlet, kör és egyenes, illetve két kör kölcsönös helyzete.

Definíció például: kör, középponti szög, radián, körszelet, érintő, polinom fokszáma

Bizonyítandó tétel például: kerületi és középponti szögek tétele, kör egyenlete, kapcsolata a másodfokú egyenlettel.

Feladat

Határozza meg a és b értékét úgy, hogy az $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ egyenletű kör átmenjen az $(1; -2)$ és a $(-2; 1)$ pontokon! Írja fel a kör origóra illeszkedő érintőjének egyenletét!

Alkalmazások

A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kötöttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
 - *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
 - a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
 - a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)
-

11. Szög- és ívmérték, trigonometrikus függvények

A középponti szög és a körív aránya, radián, fok, szögfüggvények definíciója (forgásszög), grafikonja, transzformációi, szögfüggvények közötti összefüggések.

Definíció például: ívmérték, szögfüggvények.

Bizonyítandó tétel például: szögfüggvények közötti valamelyik összefüggés:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ vagy } \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Feladat

Ábrázolja és jellemezze a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 2\sin(x - \pi) - 1$ függvényt!

Alkalmazások

A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kötöttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
 - *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
 - a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
 - a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)
-

12. Szögfüggvények és alkalmazásuk a geometriában

A szögfüggvények definíciói, a szögfüggvények közötti összefüggések, szinusztétel, koszinusztétel, nevezetes szögek szögfüggvényei.

Definíció például: valamelyik szögfüggvény.

Bizonyítandó tétel például: szinusztétel, koszinusztétel.

Feladat

Egy háromszög oldalai 13, 20 és 21 cm hosszúak. Mekkora a 20 cm-es oldalhoz tartozó súlyvonal hossza?

Alkalmazások

A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kötöttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
- *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
- a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
- a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)

13. Forgásszögek szögfüggvényei, trigonometrikus egyenletek, trigonometrikus egyenlőtlenségek

Szögfüggvények általános értelmezése, összefüggések a szögfüggvények között, pótszög, illetve kiegészítő szög szögfüggvényei, pitagoraszi összefüggés, addíciós tételek, kétszeres szögek, egyenletek, egyenlőtlenségek.

Definíció például: szögfüggvények definíciói.

Bizonyítandó tétel például: pitagoraszi összefüggés.

Feladat

Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin 2\beta} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin 2\gamma}$, akkor a háromszög szabályos.

Alkalmazások

A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kötöttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
- *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
- a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
- a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)

14. Vektorok a koordináta-geometriában

Helyvektor, vektor koordinátái, vektor abszolút értéke, műveletek koordinátákkal adott vektorokkal, szakasz felezőpontjának, harmadolópontjának koordinátái, a háromszög súlypontjának koordinátái, vektor 90°-os elforgatottja, vektorok hajlásszöge.

Definíció például: helyvektor, vektorműveletek, lineáris kombináció, bázis.

Bizonyítandó tétel például: felezőpont koordinátái, vektor abszolútértékének kiszámítása, vektor 90°-os elforgatottjának koordinátái, $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Leftrightarrow \gamma = 90^\circ$.

Feladat

Egy háromszög két csúcspontjának koordinátái $A(3 ; 2)$ és $B(5 ; -3)$. A harmadik csúcspontnál lévő szöget az abszcisszatengely felezi. Határozza meg a harmadik csúcspont koordinátáit!

Alkalmazások

A megadott témát körülbelül 15 perces, önállóan felépített szabad előadásban kell kifejtenie. A feleletbe *nem kell* a felsorolásban szereplő témák *mindegyikét* beépítenie, és természetesen a felsoroltakon kívül más fogalmakról, definíciókról és tételekről is beszélhet. Egy logikus gondolatmenet szerint felépített kiselőadást kell tartania az alábbi kötöttségek mellett.

A feleletben szerepelnie kell:

- *egy definíció* pontos kimondásának,
- *egy választott tétel* kimondásának és bizonyításának,
- a tétellapon szereplő *feladat* megoldásának,
- a téma matematikán belüli, vagy azon kívüli *alkalmazására* való utalásnak (fizika vagy más természettudomány, műszaki élet, társadalomtudományok, hétköznapi élet stb.)

15. Ponthalmazok jellemzése a koordinátageometriában

Alakzatok egyenlete, az egyenes megadásának módjai, irányvektor, normálvektor, meredekség, egyenesek párhuzamosságának, merőlegességének feltétele, kör, parabola, kapcsolatuk a kétismeretlenes másodfokú egyenlettel, egyenlőtlenségekkel jellemzett pontthalmazok.

Definíció például: alakzat egyenlete, normálvektor, parabola definíciója, kör definíciója.

Bizonyítandó tétel például: valamelyik alakzat egyenletének levezetése.

Feladat

Hol helyezkednek el a derékszögű koordináta-rendszerben azok a pontok, amelyek koordinátái eleget tesznek a következő feltételeknek?

$$a, |x| + |y| = 1;$$

$$b, |x| + |y| = 0.$$

Alkalmazások